Eksempel (Matched z-transformation)

Design et digitalt lavpasfilter, der sikrer at signaler med frekvenser højere end 2 kHz dæmpes mindst 20 dB

Det er bestemt at et 1 dB Chebyshev filter med orden 3, afskæringsfrekvens $f_a = 1$ kHz og samplefrekvens $f_s = 8$ kHz overholder denne specifikation.

Det digitale filter bestemmes ved brug af matched z-transform.

1. Bestem det analoge prototypefilters frekvensnormerede og faktoriserede overføringsfunktion $H(s)$.

Ved tabelopslag (Tabel 3.3 side 171) findes prototypefiltret

$$H(s) = \underbrace{\frac{0{,}49417}{s+0{,}49417}}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{0{,}99421}{s^2+0{,}49417s+0{,}99421}}_{H_2(s)}$$

2. Bestem de analoge frekvensnormerede poler og nulpunkter.

Polen for $H_1(s)$ er

$$s_1 = -0{,}49417$$

Polerne for $H_2(s)$ er

$$s = -0{,}2471 \pm j0{,}9660$$

3. Bestem de denormerede poler og nulpunkter.

Den denormerede pol for $H_1(s)$ er

$$\sigma_1 = -0{,}49417 \cdot \omega_a = -3105 \qquad , \omega_a = 1000 \cdot 2\pi$$

De denormerede poler for $H_2(s)$ er

$$\sigma_2 \pm j\omega_2 = (-0{,}247 \pm j0{,}9660) \cdot \omega_a$$
$$= -1553 \pm j6070$$

4. Bestem den digitale overføringsfunktions koefficienter.

Først transformeres $H_1(s)$ efter denormering ved brug af $z = e^{sT}$

$$G_1(z) = \frac{a_{01}}{z - e^{\sigma_1 T}} = \frac{a_{01}}{z + b_{11}}$$

For at DC forstærkningen er 1 $(G_1(z=1)=1)$ gælder det at

$$a_{01} = 1 + b_{11}$$

og fra $G_1(z)$ ses det at

$$b_{11} = -e^{\sigma_1 T} = -0{,}6783 \quad \Rightarrow a_{01} = 0{,}3217$$

Vi får dermed

$$G_1(z) = \frac{0{,}3217}{z - 0{,}6783} = \frac{0{,}3217\, z^{-1}}{1 - 0{,}6783 z^{-1}}$$

Hvis der ønskes et filter med minimal forsinkelse kan et nulpunkt indsættes i origo (dette ændrer ikke amplituden for $G_1(z)$). Denne overføringsfunktion er

$$\tilde{G}_1(z) = \frac{0{,}3217\, z}{z - 0{,}6783} = \frac{0{,}3217}{1 - 0{,}6783 z^{-1}}$$

Nu transformeres $H_2(s)$ efter denormering ved brug af $z = e^{sT}$

$$G_2(z) = \frac{a_{02}}{\left(z - e^{\sigma_2 T} e^{j\omega_2 T}\right)\left(z - e^{\sigma_2 T} e^{-j\omega_2 T}\right)}$$

$$= \frac{a_{02}}{z^2 - e^{\sigma_2 T} e^{j\omega_2 T} z - e^{\sigma_2 T} e^{-j\omega_2 T} z + e^{\sigma_2 T} e^{j\omega_2 T} e^{\sigma_2 T} e^{-j\omega_2 T}}$$

$$= \frac{a_{02}}{z^2 - e^{\sigma_2 T}\left(e^{j\omega_2 T} + e^{-j\omega_2 T}\right) z + e^{2\sigma_2 T}}$$

$$= \frac{a_{02}}{z^2 - 2 e^{\sigma_2 T} \cos(\omega_2 T)\, z + e^{2\sigma_2 T}} = \frac{a_{02}}{z^2 + b_{12} z + b_{22}}$$

For at DC forstærkningen er 1 gælder det at

$$a_{02} = 1 + b_{12} + b_{22}$$

og fra $G_2(z)$ ses det at

$$b_{12} = -2 e^{\sigma_2 T} \cos(\omega_2 T) = -1{,}1953$$

$$b_{22} = e^{2\sigma_2 T} = 0{,}6783 \qquad \Rightarrow \quad a_{02} = 0{,}4829$$

Vi får dermed

$$G_2(z) = \frac{0{,}4829}{z^2 - 1{,}1953 z + 0{,}6783} = \frac{0{,}4829\, z^{-2}}{1 - 1{,}1953 z^{-1} + 0{,}6783 z^{-2}}$$

Et filter med minimal forsinkelse fås ved tilføjelse af to nulpunkter i origo

$$\tilde{G}_2(z) = \frac{0{,}4829\, z^2}{z^2 - 1{,}1953 z + 0{,}6783} = \frac{0{,}4829}{1 - 1{,}1953 z^{-1} + 0{,}6783 z^{-2}}$$

Eksempel (Impuls invariant z-transformation)

Vi betragter samme design som i sidste eksempel

1. Bestem det analoge prototypefilters frekvensnormerede overføringsfunktion $H(s)$.

Ved tabelopslag (Tabel 5.3 side 171) findes prototypefiltret

$$H(s) = \underbrace{\frac{0,49417}{s+0,49417}}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{0,99421}{s^2+0,49417s+0,99421}}_{H_2(s)}$$

2. Partialbrøkopløs $H(s)$ til 1. og 2. ordens overføringsfunktioner.

Polen for $H_1(s)$ er $\sigma_1 = -0,49417$
Polerne for $H_2(s)$ er $\sigma_2 \pm j\omega_2 = -0,2471 \pm j0,9660$

Overføringsfunktionen skrives

$$H(s) = \frac{k_1}{s+0,49417} + \frac{k_2}{s+0,2471-j0,9660} + \frac{k_2^*}{s+0,2471+j0,9660}$$

og koefficienterne bestemmes som

$$k_1 = (s+0,49417)\cdot H(s)\Big|_{s=-0,49417} = 0,49417$$

$$k_2 = (s+0,2471-j0,9660)\cdot H(s)\Big|_{s=-0,2471+j0,9660} = -0,2471-j0,06326$$

3. Denormer koefficienterne k_i og polerne $\sigma_i \pm j\omega_i$.

$$k_1 = 0,49417\cdot 2\pi\cdot 1000 = 3105$$

$$\sigma_1 = -0,49417\cdot 2\pi\cdot 1000 = -3105$$

$$\sigma_2 = -0,2471\cdot 2\pi\cdot 1000 = -1553$$

$$\omega_2 = 0,9660\cdot 2\pi\cdot 1000 = 6070$$

$$k_2 = \alpha_2 - j\beta_2$$

$$\alpha_2 = -0,2471\cdot 2\pi\cdot 1000 = -1553$$

$$\beta_2 = 0,06326\cdot 2\pi\cdot 1000 = 397,5$$

4. Bestem den digitale overføringsfunktions koefficienter.

Koefficienterne findes ved brug af formlen

$$H(z) = T\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

Først transformeres $H_1(s)$

$$G_1(z) = T \cdot \frac{k_1}{1 - e^{\sigma_1 T} \cdot z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{8000} \cdot \frac{+3105}{1 - e^{-3105/8000} z^{-1}} = \frac{0{,}3881}{1 - 0{,}6783 z^{-1}}$$

Nu transformeres $H_2(s)$

$$G_2(z) = T \left(\frac{k_2}{1 - e^{s_2 T} z^{-1}} + \frac{k_2^*}{1 - e^{s_2^* T} z^{-1}} \right)$$

$$= T \frac{2\alpha_2 - 2e^{\sigma_2 T} \cdot (\alpha_2 \cos(\omega_2 T) - \beta_2 \sin(\omega_2 T)) z^{-1}}{1 - (2e^{\sigma_2 T} \cdot \cos(\omega_2 T)) z^{-1} + e^{2\sigma_2 T} z^{-2}}$$