Lektion 1: Filterfunktioner

Signalbehandling

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

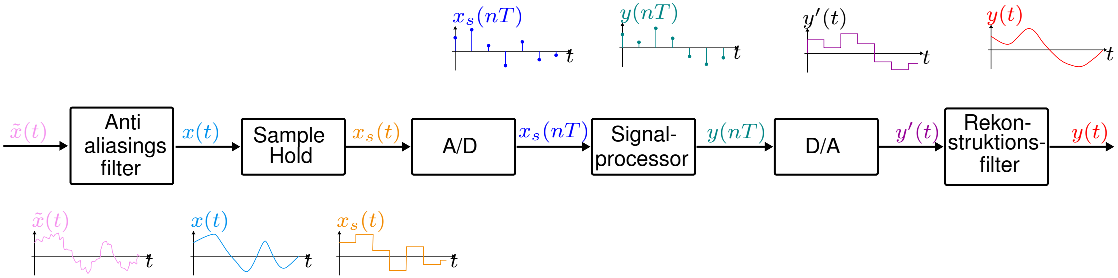
Agenda

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

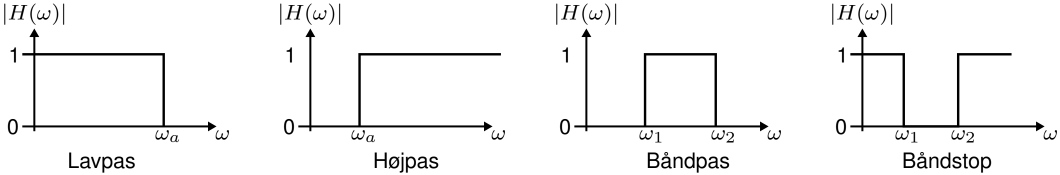
[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 4**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 5**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 6**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 7**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 8**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 10**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 11**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

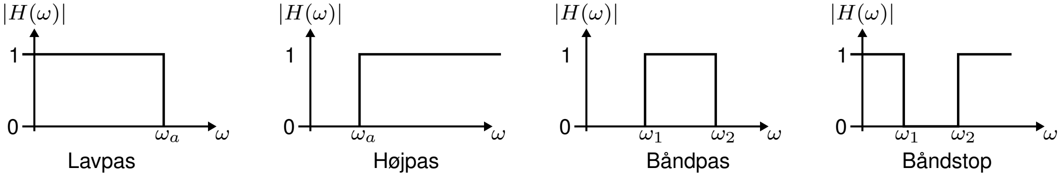


$x_s(nT)$
$y(nT)$
$y'(t)$
$y(t)$
$\tilde{x}(t)$
Anti aliasings filter
$x(t)$
Sample Hold
$x_s(t)$
A/D
$x_s(nT)$
Signal-processor
$y(nT)$
D/A
$y'(t)$
Rekon-struktions-filter
$y(t)$
$\tilde{x}(t)$
$x(t)$
$x_s(t)$
t

Amplitudekarakteristikkerne for fire grundlæggende filtertyper er illustreret herunder.



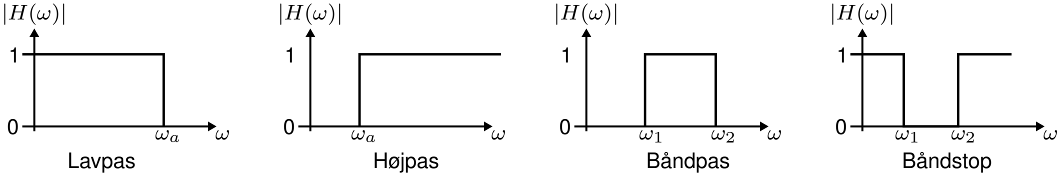
Amplitudekarakteristikkerne for fire grundlæggende filtertyper er illustreret herunder.



Terminologi

- **Pasbånd**: Frekvensområde hvor signalet passerer igennem filtret
- **Stopbånd**: Frekvensområde hvor signalet dæmpes af filtret

Amplitudekarakteristikkerne for fire grundlæggende filtertyper er illustreret herunder.



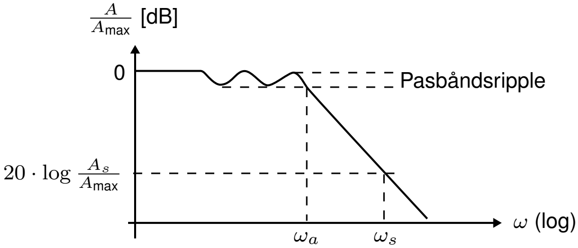
Terminologi

- **Pasbånd**: Frekvensområde hvor signalet passerer igennem filtret
- **Stopbånd**: Frekvensområde hvor signalet dæmpes af filtret

Bemærk: Disse filtre er ideelle, dvs. forstærkning i pasbånd er 1 (0 dB) og forstærkning i stopbånd er 0 (-∞ dB).

En filterspecifikation består minimum af krav til amplitudekarakteristikken for filtret (der kan også være krav til fasen). Disse krav kan for et lavpasfilter være

1. En afskæringsfrekvens ω_a som angiver pasbåndets øvre grænse.
2. En stopbåndsfrekvens ω_s, ved hvilken en stopbåndsdæmpning A_s er specificeret.
3. Information om tilladelig forstærkningsvariation i pasbåndet.



Fasekarakteristikken for et filter har også betydning for input-output opførslen for et filter. Hvis pulsoversving eller dæmpet oscillation (ringing) skal undgås, så skal filtret have konstant *gruppeløbstid*, T_g.

Fasekarakteristikken for et filter har også betydning for input-output opførslen for et filter. Hvis pulsoversving eller dæmpet oscillation (ringing) skal undgås, så skal filtret have konstant *gruppeløbstid*, T_g.

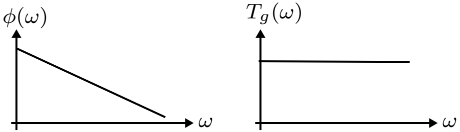
Gruppeløbstiden er et mål for tidsforsinkelsen gennem filtret; denne afhænger ofte af frekvensen ω.

Et systems gruppeløbstid er defineret som

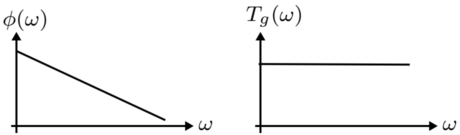
$$T_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \qquad [\mathrm{s}]$$

hvor $\phi(\omega)$ er filtrets fase [°].

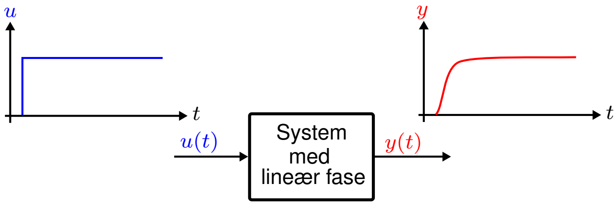
Ud fra gruppeløbstiden kan det ses om filtrets step-respons har dæmpet oscillation (ringing).
Betragt et system med lineær fase (konstant gruppeløbstid).



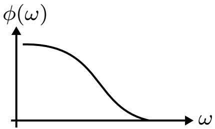
Ud fra gruppeløbstiden kan det ses om filtrets step-respons har dæmpet oscillation (ringing).
Betragt et system med lineær fase (konstant gruppeløbstid).

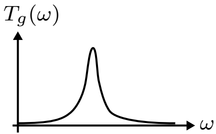


Step-responset for systemet med lineær fase har ikke oscillation.

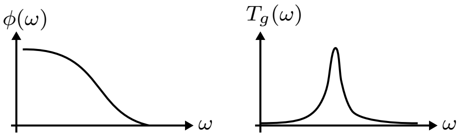


Betragt et system med ikke-lineær fase (varierende gruppeløbstid).

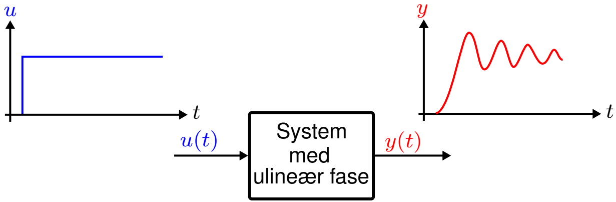




Betragt et system med ikke-lineær fase (varierende gruppeløbstid).



Step-responset for systemet med ikke-lineær fase har oscillation.



I praksis kan de ideelle filtre ikke realiseres, men kan approksimeres ved brug af diverse filterfunktionstyper.

I praksis kan de ideelle filtre ikke realiseres, men kan approksimeres ved brug af diverse filterfunktionstyper.

Vi kigger på tre filterfunktionstyper

1. Butterworth
2. Chebyshev
3. Bessel

Disse er allpole filtre (kun poler - ingen nulpunkter).

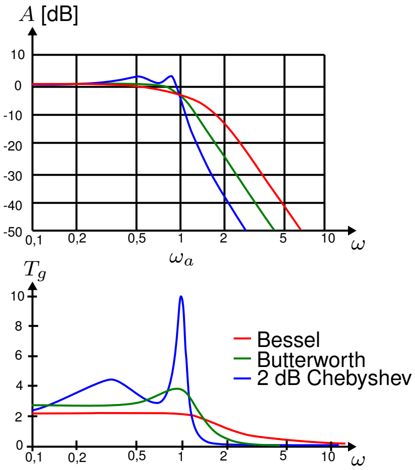
Filteroverføringsfunktioner
Overblik (I)

Når filterfunktionen til en given applikation skal vælges, er vi interesseret i følgende karakteristika

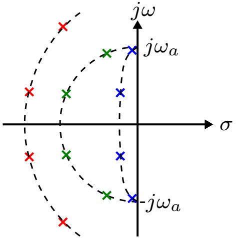
1. Konstant forstærkning i pasbånd
2. Høj dæmpning efter afskæringsfrekvens
3. Lineær fase

Når filterfunktionen til en given applikation skal vælges, er vi interesseret i følgende karakteristika

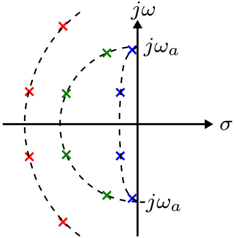
1. Konstant forstærkning i pasbånd
2. Høj dæmpning efter afskæringsfrekvens
3. Lineær fase



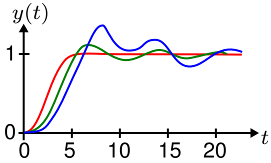
De forskellige filterfunktioner er opnået ved at vælge forskellige poler for filtrene.



De forskellige filterfunktioner er opnået ved at vælge forskellige poler for filtrene.



Step-responsene for filtrene har derfor også forskellige egenskaber.



Filteregenskaber

Butterworthfiltre (1)

Et Butterworthfilter har følgende egenskaber

1. Optimalt med hensyn til konstant forstærkning i pasbåndet.
2. Har dæmpning på 3 dB ved afskæringsfrekvensen og herefter falder filtrets forstærkning hurtigt med 20 dB/dec.
3. Fasen for filtret er ikke konstant i pasbåndet, hvilket medfører ringning ved step-input.

Alle polpar for et Butterworthfilter har naturlig egenfrekvens ω_n, der er lig med afskæringsfrekvensen ω_a.

Det kvardrerede amplituderespons for et Nte ordens Butterworthfilter er

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_a)^{2N}}$$

hvor ω_a er afskæringsfrekvensen [rad/s].

Filteregenskaber
Butterworthfiltre (1)

Det kvardrerede amplituderespons for et Nte ordens Butterworthfilter er

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_a)^{2N}}$$

hvor ω_a er afskæringsfrekvensen [rad/s].

Alle poler for $H(j\omega)$ ligger i venstre halvplan på en cirkel med radius ω_a og centrum i origo.

Filteregenskaber

Chebyshevfiltre (1)

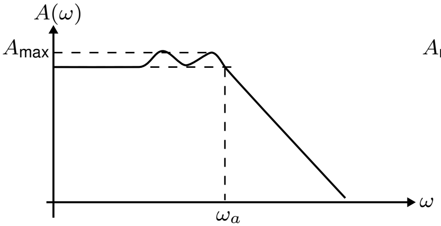
Et Chebyshevfilter har følgende egenskaber

1. Har varierende forstærkning i pasbåndet - pasbåndsripplens størrelse kan vælges frit.
2. Forstærkningen falder hurtigt omkring afskæringsfrekvensen.
3. Fasen for filtret er ikke konstant i pasbåndet, hvilket medfører ringning ved step-input.

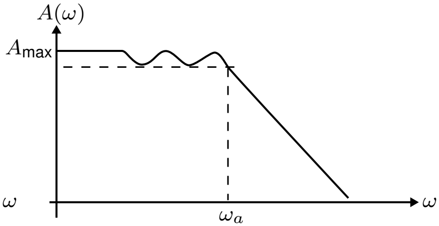
Et Chebyshevfilter har følgende egenskaber

1. Har varierende forstærkning i pasbåndet - pasbåndsripplens størrelse kan vælges frit.
2. Forstærkningen falder hurtigt omkring afskæringsfrekvensen.
3. Fasen for filtret er ikke konstant i pasbåndet, hvilket medfører ringning ved step-input.

DC-forstærkningen for et Chebyshev lavpasfilter er ikke filtrets maksimale forstærkning, hvis polantallet er lige.



Lige polantal



Ulige polantal

Det kvardrerede amplituderespons for et Nte ordens Chebyshevfilter er

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_a)}$$

hvor $T_N(\omega)$ er Chebyshev polynomium af grad N givet ved

$$T_N(\omega) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(\omega)) & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}(\omega)) & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Det kvardrerede amplituderespons for et Nte ordens Chebyshevfilter er

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_a)}$$

hvor $T_N(\omega)$ er Chebyshev polynomium af grad N givet ved

$$T_N(\omega) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(\omega)) & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(\omega)) & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Pasbåndsripplens størrelse δ i dB er givet af ϵ

$$\delta = 10 \log(\epsilon^2 + 1)$$

Filteregenskaber
Besselfiltre

Et Besselfilter har følgende egenskaber

1. Har ikke ripple i pasbåndet, men amplituden er ikke lige så konstant som ved Butterworthfilter.
2. Har dæmpning der er meget glidende. Amplitudekarakteristikken for filtret er som for første ordens filter for de første 6 dB's dæmpning uanset polantal.
3. Fasen er næsten lineær med frekvensen indenfor pasbåndet.

Et Besselfilter har følgende egenskaber

1. Har ikke ripple i pasbåndet, men amplituden er ikke lige så konstant som ved Butterworthfilter.
2. Har dæmpning der er meget glidende. Amplitudekarakteristikken for filtret er som for første ordens filter for de første 6 dB's dæmpning uanset polantal.
3. Fasen er næsten lineær med frekvensen indenfor pasbåndet.

Overføringsfunktionen for et Nte ordens Besselfilter er

$$H_N(s) = \frac{b_0}{s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

hvor

$$b_k = \frac{(2N-k)!}{2^{N-k}k!(N-k)!}$$

Valg af filterets ordenstal

Fremgangsmetode

Ordenstallet for filtre kan findes ved at aflæse amplitudekarakteristikken for en givet filterfunktion, og sammenholde denne med krav til dæmpning ved stopbåndsfrekvensen.

Disse grafer er normerede, dvs.
forstærkningen er

$$Y = 20 \log \frac{A}{A_{\text{max}}}$$

Valg af filterets ordenstal

Fremgangsmetode

Ordenstallet for filtre kan findes ved at aflæse amplitudekarakteristikken for en givet filterfunktion, og sammenholde denne med krav til dæmpning ved stopbåndsfrekvensen.

Disse grafer er normerede, dvs. forstærkningen er

$$Y = 20 \log \frac{A}{A_{\text{max}}}$$

På tilsvarende vis er frekvensen normeret

$$X = \frac{\omega}{\omega_a}$$

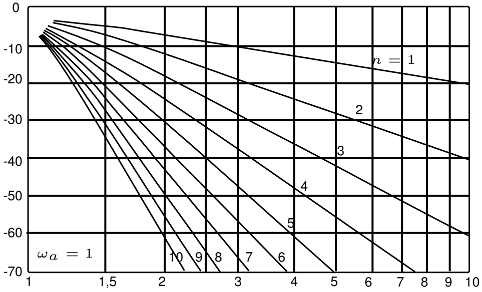
Ordenstallet for filtre kan findes ved at aflæse amplitudekarakteristikken for en givet filterfunktion, og sammenholde denne med krav til dæmpning ved stopbåndsfrekvensen.

Disse grafer er normerede, dvs. forstærkningen er

$$Y = 20 \log \frac{A}{A_{\text{max}}}$$

På tilsvarende vis er frekvensen normeret

$$X = \frac{\omega}{\omega_a}$$



Find polantallet for et lavpasfilter med kravene

- Afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz
- Stopbåndsfrekvens $f_s = 8$ kHz
- Stopbåndsdæmpning i forhold til A_{max} på mindst 60 dB

Valg af filterets ordenstal

Eksempel

Find polantallet for et lavpasfilter med kravene

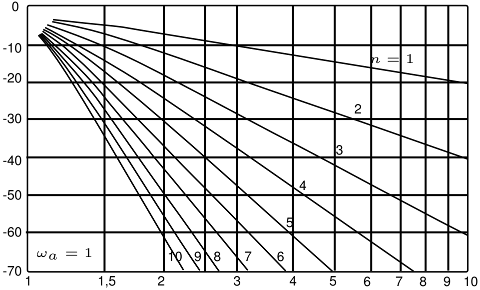
- Afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz
- Stopbåndsfrekvens $f_s = 8$ kHz
- Stopbåndsdæmpning i forhold til A_{max} på mindst 60 dB

Den normerede stopbåndsfrekvens er $f_s/f_a = 4$.

Valg af filterets ordenstal
Eksempel

Find polantallet for et lavpasfilter med kravene
- Afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz
- Stopbåndsfrekvens $f_s = 8$ kHz
- Stopbåndsdæmpning i forhold til A_{max} på mindst 60 dB

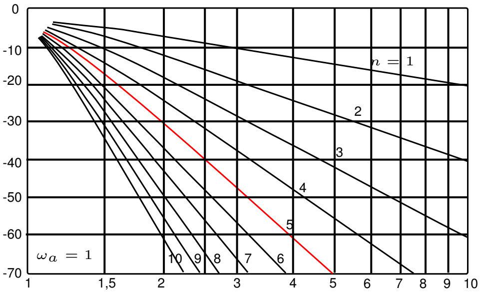
Den normerede stopbåndsfrekvens er $f_s/f_a = 4$.



Find polantallet for et lavpasfilter med kravene

- Afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz
- Stopbåndsfrekvens $f_s = 8$ kHz
- Stopbåndsdæmpning i forhold til A_{max} på mindst 60 dB

Den normerede stopbåndsfrekvens er $f_s/f_a = 4$.



Når et filter skal implementeres, så implementeres den generelle overføringsfunktion for et lavpasfilter ikke

$$H(s) = \frac{A_0}{s^n + B_{n-1}s^{n-1} + \cdots + B_1 s + B_0}$$

Årsagen til dette er for analoge filtre at dette giver hårde krav til komponent-tolerancer, og for digitale filtre er årsagen regnenøjagtighed og dynamikområde.

Når et filter skal implementeres, så implementeres den generelle overføringsfunktion for et lavpasfilter ikke

$$H(s) = \frac{A_0}{s^n + B_{n-1}s^{n-1} + \cdots + B_1 s + B_0}$$

Årsagen til dette er for analoge filtre at dette giver hårde krav til komponent-tolerancer, og for digitale filtre er årsagen regnenøjagtighed og dynamikområde.

Filtre realiseres derfor som en kaskade af 1. og 2. ordens overføringsfunktioner. Bemærk at rækkefølgen af del-filtrene har betydning pga. fx dynamikområde.

Betragt implementeringen af et normeret 5. ordens 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter

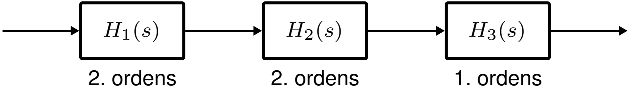
$$H(s) = \frac{A_0}{s^5 + B_4 s^4 + B_3 s^3 + B_2 s^2 + B_1 s + B_0}$$

Konstruktion af filtre
Eksempel - Konstruktion af 5. ordens lavpasfilter (I)

Betragt implementeringen af et normeret 5. ordens 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter

$$H(s) = \frac{A_0}{s^5 + B_4 s^4 + B_3 s^3 + B_2 s^2 + B_1 s + B_0}$$

Dette filter skal implementeres som en kaskade af to 2. ordens filtre og et 1. ordens filter som vist her



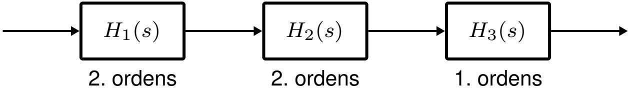
Konstruktion af filtre

Eksempel - Konstruktion af 5. ordens lavpasfilter (I)

Betragt implementeringen af et normeret 5. ordens 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter

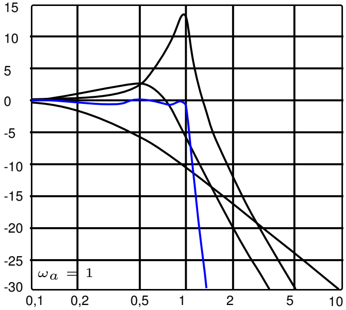
$$H(s) = \frac{A_0}{s^5 + B_4 s^4 + B_3 s^3 + B_2 s^2 + B_1 s + B_0}$$

Dette filter skal implementeres som en kaskade af to 2. ordens filtre og et 1. ordens filter som vist her

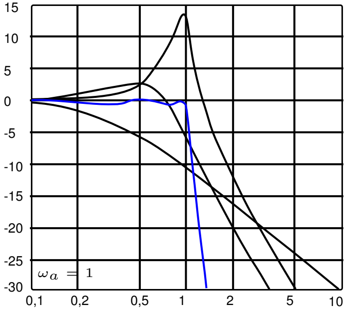


Filterkoefficienterne for filtrene kan findes ved tabelopslag.

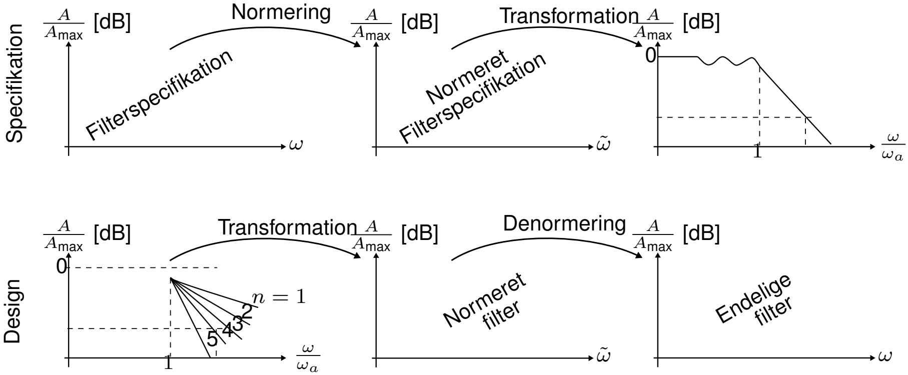
De tre filtre der skal benyttes til konstruktion af det ønskede filter, har følgende amplitudekarakteristikker.



De tre filtre der skal benyttes til konstruktion af det ønskede filter, har følgende amplitudekarakteristikker.

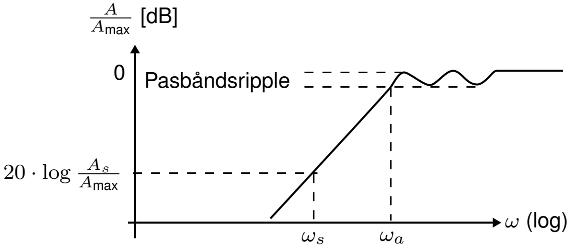


Det ses at et af filtrene har en maksimalforstærkning på 13 dB - dette kan give anledning til problemer ved implementering, pga. begrænset dynamikområde.

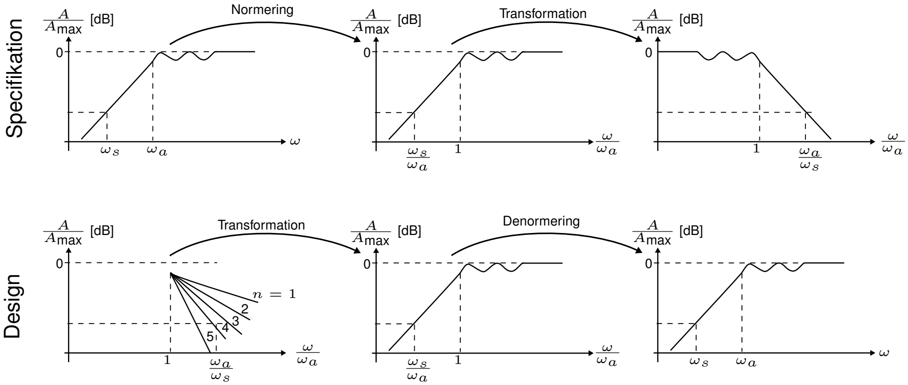

Specifikation
$\frac{A}{A_{\text{max}}}$ [dB]
Normering
Filterspecifikation
ω
$\frac{A}{A_{\text{max}}}$ [dB]
Transformation
Normeret Filterspecifikation
$\tilde{\omega}$
$\frac{A}{A_{\text{max}}}$ [dB]
0
1
$\frac{\omega}{\omega_a}$
Design
$\frac{A}{A_{\text{max}}}$ [dB]
Transformation
0
$n = 1$
2
3
4
5
1
$\frac{\omega}{\omega_a}$
$\frac{A}{A_{\text{max}}}$ [dB]
Denormering
Normeret filter
$\tilde{\omega}$
$\frac{A}{A_{\text{max}}}$ [dB]
Endelige filter
ω

Højpasfiltre kan designes ud fra normaliserede prototype lavpasfiltre på baggrund af følgende specifikation

- *Filterfunktionen* (Bessel, Butterworth, Chebyshev)
- Filtrets *afskæringsfrekvens* ω_a
- Filtrets *stopbåndsfrekvens* ω_s
- Filtrets *stopbåndsdæmpning* A_s ved stopbåndsfrekvensen ω_s



Lavpas til højpas transformation
Overblik over designprocedure



Lavpas til højpas transformation

Et lavpasfilter kan transformeres til et højpas filter ved

$$H_{\mathsf{hp}}(s) = H_{\mathsf{lp}}(\bar{s})\big|_{\bar{s}=\frac{1}{s}}$$

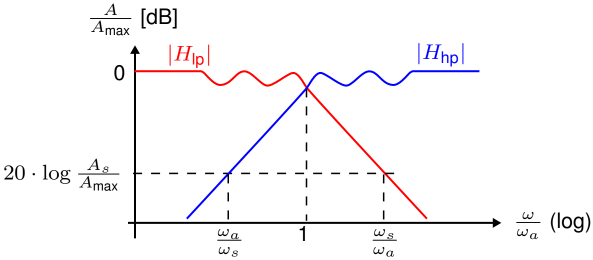
Lavpas til højpas transformation

Filtertransformation

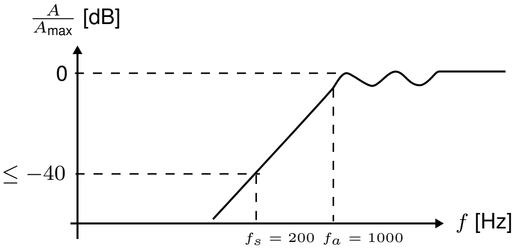
Et lavpasfilter kan transformeres til et højpas filter ved

$$H_{\mathrm{hp}}(s) = H_{\mathrm{lp}}(\bar{s})\big|_{\bar{s}=\frac{1}{s}}$$

Transformationen svarer til at spejle frekvensaksen om 1, som vist her



Design et 1 dB Chebyshev højpasfilter, der opfylder følgende amplitudekarakteristik.



For at designe filtret, så ***normeres*** højpasfiltret, dvs. den normerede stopbåndsfrekvens udregnes til

$$\frac{\omega_s}{\omega_a} = \frac{f_s}{f_a} = \frac{1}{5}$$

For at designe filtret, så ***normeres*** højpasfiltret, dvs. den normerede stopbåndsfrekvens udregnes til

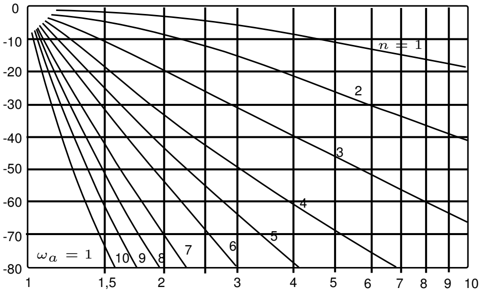
$$\frac{\omega_s}{\omega_a} = \frac{f_s}{f_a} = \frac{1}{5}$$

Slutteligt udregnes stopbåndsfrekvensen for det normerede lavpasfilter, der benyttes til designet. Denne er

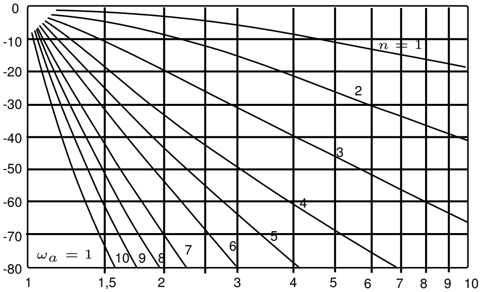
$$\frac{\omega_a}{\omega_s} = 5$$

Lavpas til højpas transformation
Eksempel - Valg af filterorden

Filtret designes ved at vælge ordenstallet for filtret. Dette gøres på baggrund af amplitudekarakteristikker for 1 dB Chebyshev lavpasfiltre. Det er et krav at forstærkningen er under -40 dB ved en frekvens på 5.



Filtret designes ved at vælge ordenstallet for filtret. Dette gøres på baggrund af amplitudekarakteristikker for 1 dB Chebyshev lavpasfiltre. Det er et krav at forstærkningen er under -40 dB ved en frekvens på 5.



Det mindste ordenstal for filtret, der opfylder kravet er 3 ($n = 3$).

Dermed bliver det normerede lavpasfilters overføringsfunktion (ved tabelopslag)

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0,49417s + 0,99421)(s + 0,49417)}$$

Dermed bliver det normerede lavpasfilters overføringsfunktion (ved tabelopslag)

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0,49417s + 0,99421)(s + 0,49417)}$$

Det normerede højpasfilter bliver dermed (erstat s med $1/s$ alle steder i ovenstående)

$$H(s) = \frac{s^3}{(1 + 0,49417s + 0,99421s^2)(1 + 0,49417s)}$$

Dermed bliver det normerede lavpasfilters overføringsfunktion (ved tabelopslag)

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0,49417s + 0,99421)(s + 0,49417)}$$

Det normerede højpasfilter bliver dermed (erstat s med $1/s$ alle steder i ovenstående)

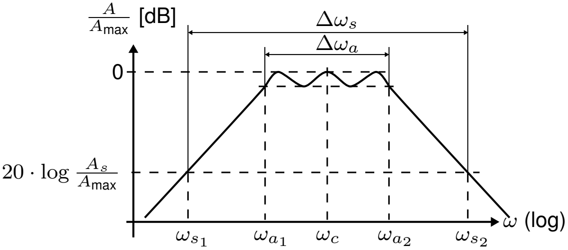
$$H(s) = \frac{s^3}{(1 + 0,49417s + 0,99421s^2)(1 + 0,49417s)}$$

Det denormerede højpasfilters overføringsfunktion er (erstat s med s/ω_a alle steder i ovenstående)

$$H(s) = \frac{s^3/\omega_a^3}{(1 + 0,49417/\omega_a s + 0,99421/\omega_a^2 s^2)(1 + 0,49417/\omega_a s)}$$

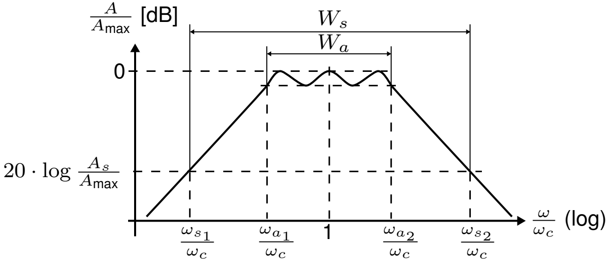
Båndpasfiltre kan designes ud fra normaliserede prototype lavpasfiltre på baggrund af følgende specifikation

- *Filterfunktionen* (Bessel, Butterworth, Chebyshev)
- Filtrets *centerfrekvens* ω_c
- *Pasbånds-båndbredden* $\Delta\omega_a$
- *Stopbånds-båndbredden* $\Delta\omega_s$
- Filtrets *stopbåndsdæmpning* A_s



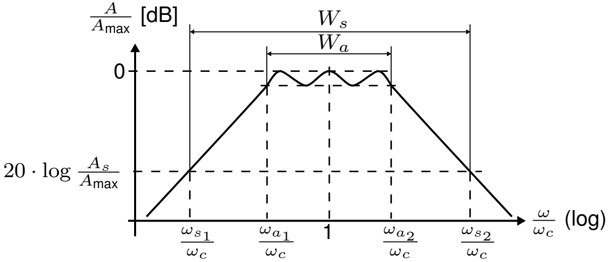
Båndpasfiltret normeres til centerfrekvensen ω_c, som er midt imellem ω_{a_1} og ω_{a_2} på en logaritmisk akse, dvs.

$$\log\omega_c = \frac{\log\omega_{a_1} + \log\omega_{a_2}}{2} = \log\sqrt{\omega_{a_1}\omega_{a_2}}$$
$$\omega_c = \sqrt{\omega_{a_1}\omega_{a_2}}$$



Båndpasfiltret normeres til centerfrekvensen ω_c, som er midt imellem ω_{a_1} og ω_{a_2} på en logaritmisk akse, dvs.

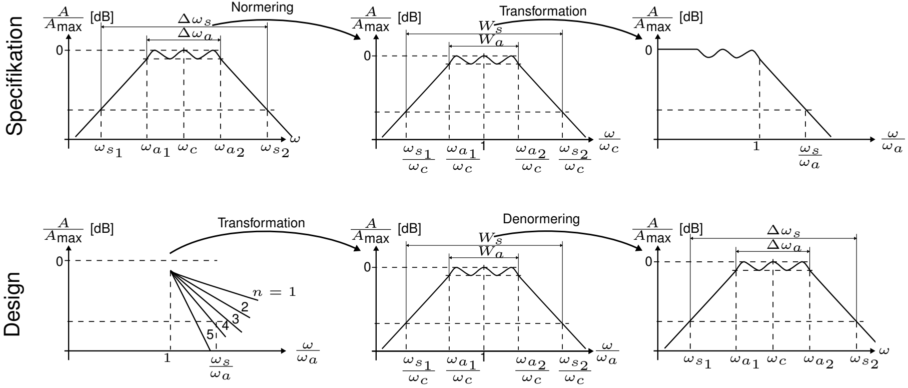
$$\log \omega_c = \frac{\log \omega_{a_1} + \log \omega_{a_2}}{2} = \log \sqrt{\omega_{a_1}\omega_{a_2}}$$
$$\omega_c = \sqrt{\omega_{a_1}\omega_{a_2}}$$



Formfaktoren for et båndpasfilter er defineret som $F = \frac{W_s}{W_a}$.

Lavpas til båndpas transformation

Overblik over designprocedure

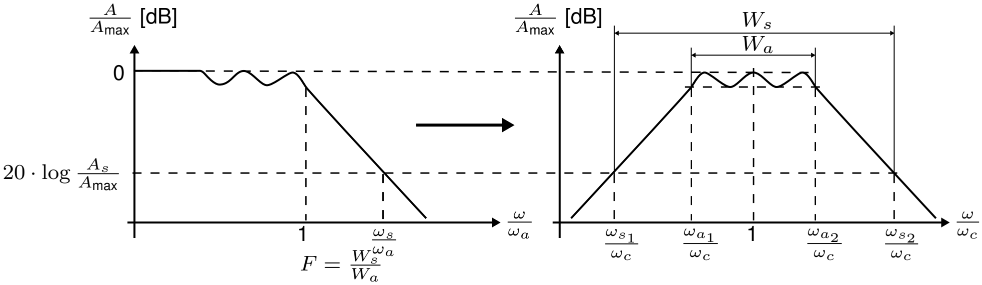


Et lavpasfilter kan transformeres til et båndpasfilter ved

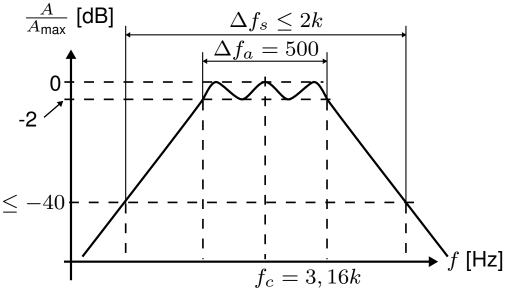
$$H_{\mathsf{bp}}(s) = H_{\mathsf{lp}}(\bar{s})\big|_{\bar{s}=\frac{1}{W_a}(s+\frac{1}{s})}$$

Et lavpasfilter kan transformeres til et båndpasfilter ved

$$H_{\text{bp}}(s) = H_{\text{lp}}(\bar{s})\big|_{\bar{s}=\frac{1}{W_a}\left(s+\frac{1}{s}\right)}$$



Design et 2 dB Chebyshev båndpasfilter, der opfylder følgende amplitudekarakteristik.



For at designe filtret, så ***normeres*** båndpasfiltret, dvs. den normerede stopbåndsbredde og den normerede pasbåndsbredde udregnes til

$$W_a = \frac{\Delta f_a}{f_c} = 0,1582$$
$$W_s = \frac{\Delta f_s}{f_c} = 0,6329$$

For at designe filtret, så ***normeres*** båndpasfiltret, dvs. den normerede stopbåndsbredde og den normerede pasbåndsbredde udregnes til

$$W_a = \frac{\Delta f_a}{f_c} = 0,1582$$

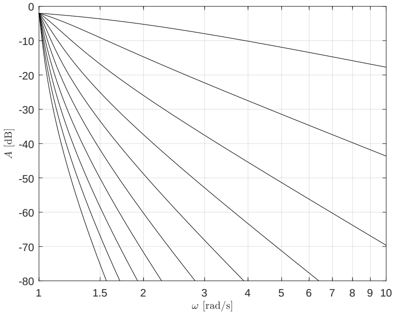
$$W_s = \frac{\Delta f_s}{f_c} = 0,6329$$

Slutteligt udregnes formfaktoren til

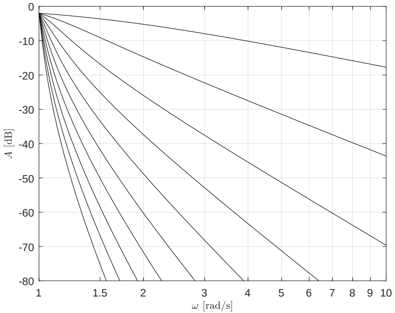
$$F = \frac{\Delta f_s}{\Delta f_a} = 4$$

Lavpas til båndpas transformation
Eksempel - Valg af filterorden

Filtret designes ved at vælge ordenstallet for filtret. Dette gøres på baggrund af amplitudekarakteristikker for 2 dB Chebyshev lavpasfiltre. Det er et krav at forstærkningen er under -40 dB ved en frekvens på 4, da $F = 4$.



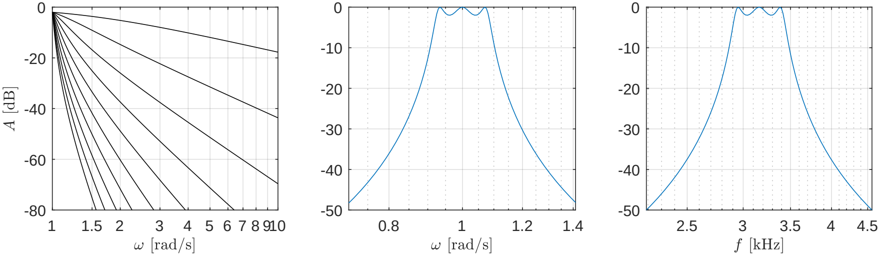
Filtret designes ved at vælge ordenstallet for filtret. Dette gøres på baggrund af amplitudekarakteristikker for 2 dB Chebyshev lavpasfiltre. Det er et krav at forstærkningen er under -40 dB ved en frekvens på 4, da $F = 4$.



Det mindste ordenstal for filtret, der opfylder kravet er 3 ($n = 3$).

Lavpas til båndpas transformation

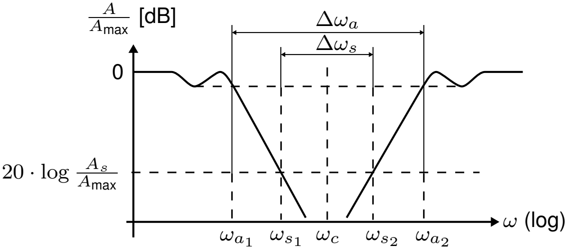
Eksempel - Denormering



- Det normerede filter findes ved at erstatte s med $\frac{1}{W_a}(s + \frac{1}{s})$ i lavpasfiltret.
- Det denormerede båndpasfilter findes ved at erstatte s i det normerede båndpasfilter med s/ω_c.

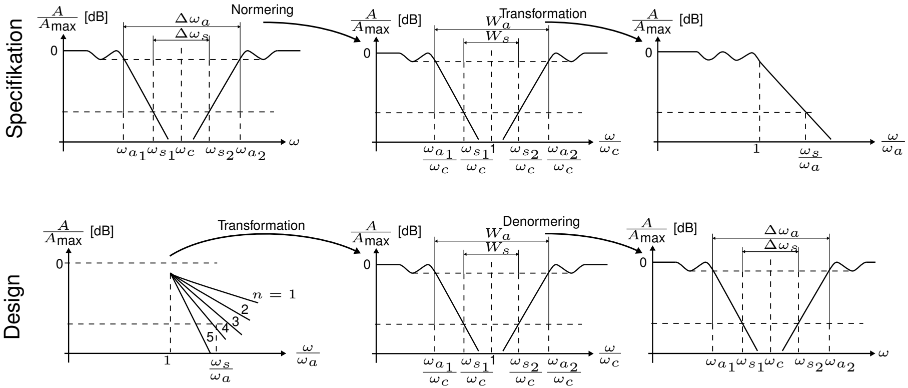
Båndstopfiltre kan designes ud fra normaliserede prototype lavpasfiltre på baggrund af følgende specifikation

- *Filterfunktionen* (Bessel, Butterworth, Chebyshev)
- Filtrets *centerfrekvens* ω_c
- *Pasbånds-båndbredden* $\Delta\omega_a$
- *Stopbånds-båndbredden* $\Delta\omega_s$
- Filtrets *stopbåndsdæmpning* A_s



Lavpas til båndstop transformation

Overblik over designprocedure



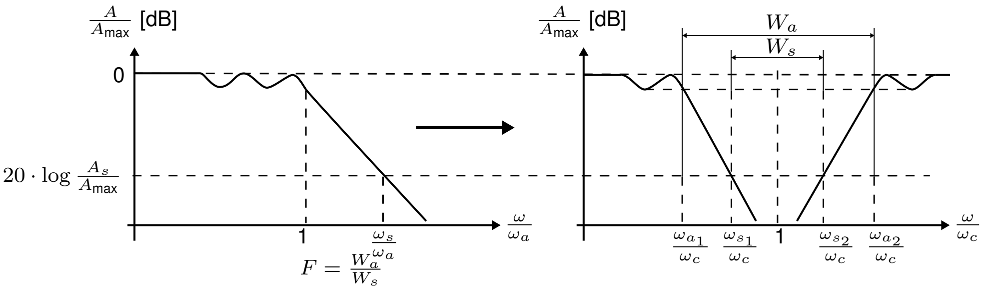
Et lavpasfilter kan transformeres til et båndstopfilter ved

$$H_{\mathsf{bs}}(s) = H_{\mathsf{lp}}(\bar{s})\big|_{\bar{s}=\frac{w_a}{s+\frac{1}{s}}}$$

Et lavpasfilter kan transformeres til et båndstopfilter ved

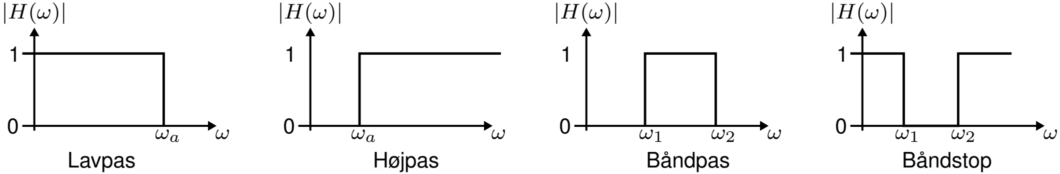
$$H_{\text{bs}}(s) = H_{\text{lp}}(\bar{s})\big|_{\bar{s}=\frac{W_a}{s+\frac{1}{s}}}$$

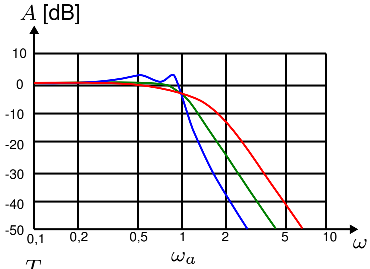
Transformationen er illustreret i følgende figur.



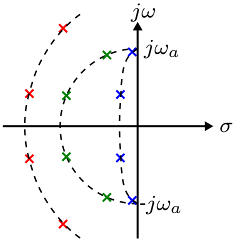
Formfaktoren for et båndstopfilter er defineret som $F = \frac{W_a}{W_s}$.

Fire grundlæggende filtertyper betragtes, som er defineret ud fra deres pasbånd og stopbånd.

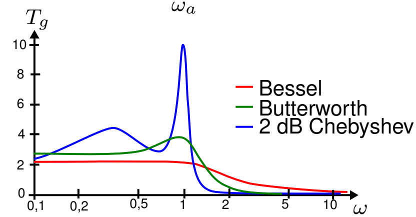




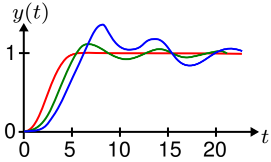
A [dB]
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0,1
0,2
0,5
1
2
5
10
ω
ω_a



$j\omega$
$j\omega_a$
σ
$-j\omega_a$



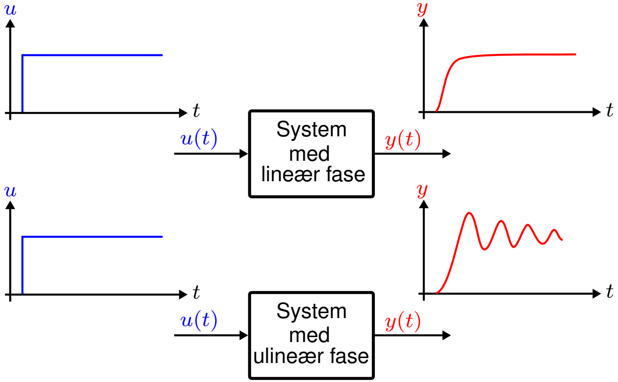
T_g
10
8
6
4
2
0
0,1
0,2
0,5
1
2
5
10
ω
Bessel
Butterworth
2 dB Chebyshev



$y(t)$
1
0
0
5
10
15
20
t

Et systems gruppeløbstid (tidsforsinkelsen gennem filtret) er defineret som

$$T_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \qquad [\mathrm{s}]$$



Opsummering

Design procedure