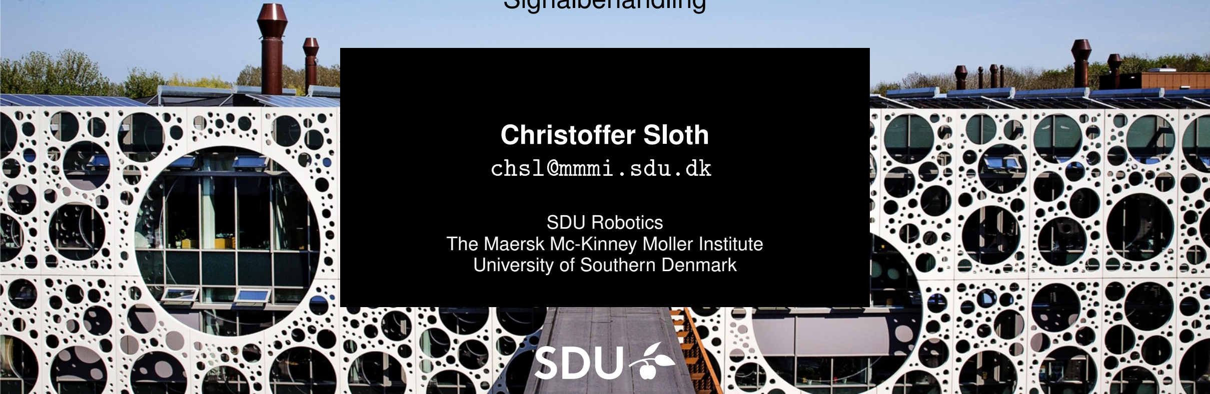
Lektion 10: Introduktion til FIR-filtre

Signalbehandling



Christoffer Sloth
chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

Agenda

Introduktion
Pensum for Signalbehandling

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

FIR-filter
Definition

Et *finite impulse response* filter (FIR-filter) har et endeligt impulsrespons, som definerer filtrets størrelse. Et FIR-filter med N samples har impulsresponssekvens

$$h(n) = \begin{cases} a_n & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

FIR-filter
Definition

Et *finite impulse response* filter (FIR-filter) har et endeligt impulsrespons, som definerer filtrets størrelse. Et FIR-filter med N samples har impulsresponssekvens

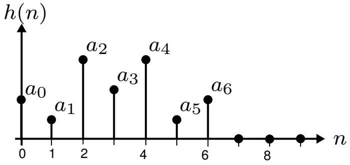
$$h(n) = \begin{cases} a_n & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Filtret har dermed N koefficienter a_n for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Et *finite impulse response* filter (FIR-filter) har et endeligt impulsrespons, som definerer filtrets størrelse. Et FIR-filter med N samples har impulsresponssekvens

$$h(n) = \begin{cases} a_n & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Filtret har dermed N koefficienter a_n for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.



FIR-filtrets impulsrespons kan skrives

$$h(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(n-i)$$

FIR-filtrets impulsrespons kan skrives

$$h(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(n-i)$$

Ved z-transformation af $h(n)$ fås

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

FIR-filtrets impulsrespons kan skrives

$$h(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \delta(n-i)$$

Ved z-transformation af $h(n)$ fås

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

Overføringsfunktionen kan skrives med positive potenser som

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{N-1-i}}{z^{N-1}}$$

hvoraf det ses at $H(z)$ har $N-1$ poler i origo for z-planen og $N-1$ nulpunkter.

Fra overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

ses det at

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

Fra overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

ses det at

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

Ved invers z-transformation fås

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i)$$

FIR-filter
Realisationsstruktur

Fra overføringsfunktionen

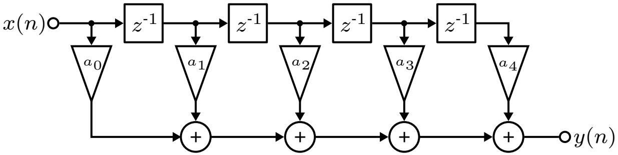
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

ses det at

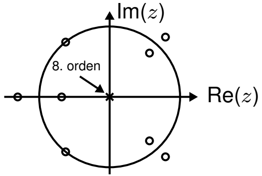
$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}$$

Ved invers z-transformation fås

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i)$$

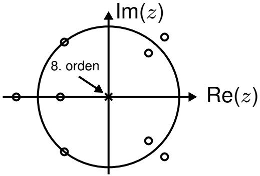


Følgende er pol-nulpunktsdiagram for et 8. ordens FIR-filter.



FIR-filter
Eksempel

Følgende er pol-nulpunktsdiagram for et 8. ordens FIR-filter.



Filtret har lineær fase da nulpunkterne er i par, så hvis der er et nulpunkt i $z = r\angle\phi$ så er der også et nulpunkt i $z = 1/r\angle\phi$.

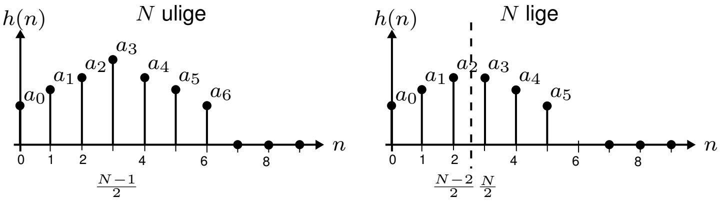
Lineær fase
Betingelse

Et FIR filter med $N \geq 2$ samples har *lineær fase* hvis dets impulsrespons er symmetrisk omkring midtpunktet, dvs.

$$h(i) = h(N-1-i) \qquad \text{for } i = 0, 1, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor - 1$$

Et FIR filter med $N \geq 2$ samples har *lineær fase* hvis dets impulsrespons er symmetrisk omkring midtpunktet, dvs.

$$h(i) = h(N-1-i) \qquad \text{for } i = 0, 1, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor - 1$$



Lineær fase

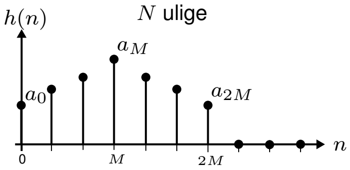
Antagelse

I det følgende antages det at N er ulige og den midterste sample får index

$$M = \frac{N-1}{2}$$

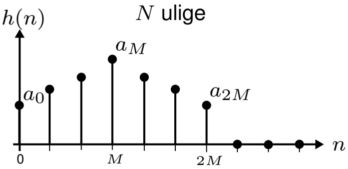
I det følgende antages det at N er ulige og den midterste sample får index

$$M = \frac{N-1}{2}$$



I det følgende antages det at N er ulige og den midterste sample får index

$$M = \frac{N-1}{2}$$



Dette betyder at

$$h(n) = h(2M - n)$$

og

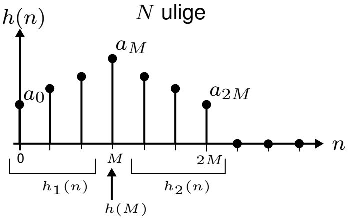
$$a_i = a_{2M-i}$$

Frekvensresponsanalyse

Når et FIR-filter designes kan ordenstallet ikke bestemmes nøjagtigt på forhånd som ved IIR-filtret. Derfor kan det være nødvendigt at redesigne filtret for at opnå en ønsket filterspecifikation.

Når et FIR-filter designes kan ordenstallet ikke bestemmes nøjagtigt på forhånd som ved IIR-filtret. Derfor kan det være nødvendigt at redesigne filtret for at opnå en ønsket filterspecifikation.

I den følgende analyse antages det at N er ulige.



Udtrykket for et FIR-filters impulsrespons kan opdeles som følger

$$h(n) = h_1(n) + h(M) + h_2(n)$$

Udtrykket for et FIR-filters impulsrespons kan opdeles som følger

$$h(n) = h_1(n) + h(M) + h_2(n)$$

Dette kan skrives

$$h(n) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i\delta(n-i) + a_M\delta(n-M) + \sum_{i=M+1}^{2M} a_i\delta(n-i)$$

Udtrykket for et FIR-filters impulsrespons kan opdeles som følger

$$h(n) = h_1(n) + h(M) + h_2(n)$$

Dette kan skrives

$$h(n) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \delta(n-i) + a_M \delta(n-M) + \sum_{i=M+1}^{2M} a_i \delta(n-i)$$

eller

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{i=0}^{M-1} a_i \delta(n-i) + a_M \delta(n-M) + \sum_{i=0}^{M-1} a_i \delta(n-(2M-i)) \\ &= a_M \delta(n-M) + \sum_{i=0}^{M-1} a_i \left(\delta(n-i) + \delta(n-(2M-i))\right) \end{aligned}$$

Fra impulsresponssekvensen kan overføringsfunktionen findes ved z-transformation som

$$\begin{aligned} H(z) &= a_M z^{-M} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i \left(z^{-i} + z^{-(2M-i)} \right) \\ &= a_M z^{-M} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i z^{-M} \left(z^{M-i} + z^{-(M-i)} \right) \end{aligned}$$

Fra impulsresponssekvensen kan overføringsfunktionen findes ved z-transformation som

$$H(z) = a_M z^{-M} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i \left(z^{-i} + z^{-(2M-i)} \right)$$
$$= a_M z^{-M} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i z^{-M} \left(z^{M-i} + z^{-(M-i)} \right)$$

For at finde frekvensresponset, erstattes z med $e^{j\omega T} = e^{j\pi f/f_o}$ og vi får

$$H(e^{j\pi f/f_o}) = a_M e^{-jM\pi f/f_o} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-jM\pi f/f_o} \left(e^{j(M-i)\pi f/f_o} + e^{-j(M-i)\pi f/f_o} \right)$$

Fra impulsresponssekvensen kan overføringsfunktionen findes ved z-transformation som

$$\begin{aligned} H(z) &= a_M z^{-M} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i \left(z^{-i} + z^{-(2M-i)} \right) \\ &= a_M z^{-M} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i z^{-M} \left(z^{M-i} + z^{-(M-i)} \right) \end{aligned}$$

For at finde frekvensresponset, erstattes z med $e^{j\omega T} = e^{j\pi f/f_o}$ og vi får

$$H(e^{j\pi f/f_o}) = a_M e^{-jM\pi f/f_o} + \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-jM\pi f/f_o} \left(e^{j(M-i)\pi f/f_o} + e^{-j(M-i)\pi f/f_o} \right)$$

Dette kan skrives ($\gamma := f/f_o$)

$$H(\gamma) = e^{-jM\pi\gamma} \left(a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cos((M-i)\gamma\pi) \right)$$

Overføringsfunktionen

$$H(\gamma) = e^{-jM\pi\gamma}\left(a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cos((M-i)\gamma\pi)\right)$$

har amplitude

$$|H(\gamma)| = a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cos((M-i)\gamma\pi)$$

Overføringsfunktionen

$$H(\gamma) = e^{-jM\pi\gamma}\left(a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i\cos((M-i)\gamma\pi)\right)$$

har amplitude

$$|H(\gamma)| = a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i\cos((M-i)\gamma\pi)$$

og fase

$$\angle H(\gamma) = -M\pi\gamma$$

Overføringsfunktionen

$$H(\gamma) = e^{-jM\pi\gamma}\left(a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cos((M-i)\gamma\pi)\right)$$

har amplitude

$$|H(\gamma)| = a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cos((M-i)\gamma\pi)$$

og fase

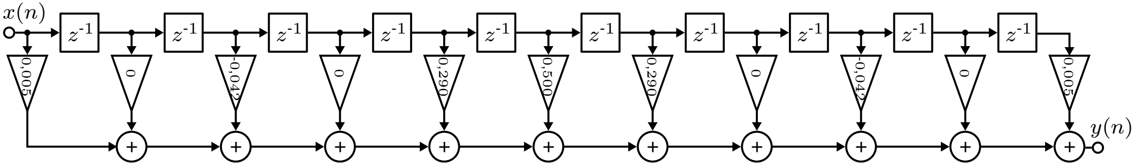
$$\angle H(\gamma) = -M\pi\gamma$$

Dette giver en gruppeløbstid

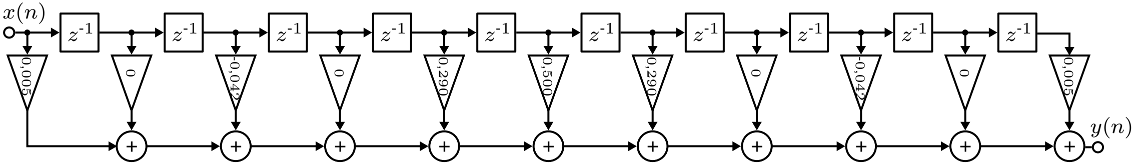
$$T_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = MT = \frac{N-1}{2}T$$

hvor T er sampleintervallet [s] og $\phi(\omega)$ er fasen af $H(\omega)$.

Betragt et FIR-filter med følgende realisationsstruktur og samplefrekvens $f_s = 40$ kHz.

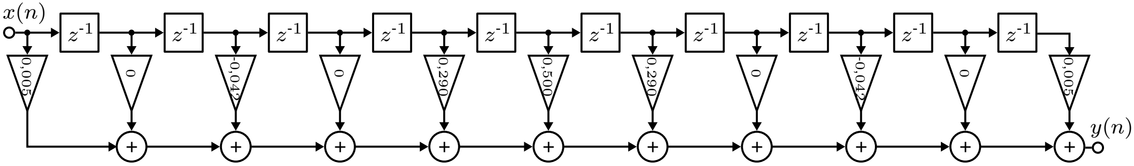


Betragt et FIR-filter med følgende realisationsstruktur og samplefrekvens $f_s = 40$ kHz.



Hvad er filtrets M-værdi?

Betragt et FIR-filter med følgende realisationsstruktur og samplefrekvens $f_s = 40$ kHz.



Hvad er filtrets M-værdi?

Hvad er filtrets koefficienter?

Forstærkningen af filtret findes ved $f = 10$ kHz som

$$|H(10\text{k})| = 20\log\left[0,5 + \sum_{i=0}^{4} 2a_i \cos\left((5-i)\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= -6,02 \text{ dB}$$

hvor

$$\gamma = \frac{f}{f_o} = \frac{10\text{k}}{20\text{k}} = 0,5$$

Forstærkningen af filtret findes ved $f = 10$ kHz som

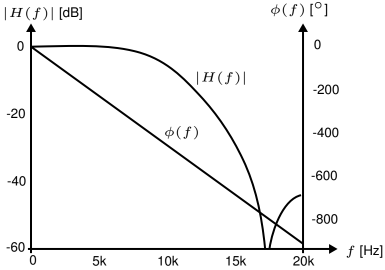
$$|H(10\text{k})| = 20\log\left[0,5 + \sum_{i=0}^{4} 2a_i \cos\left((5-i)\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= -6,02 \text{ dB}$$

hvor

$$\gamma = \frac{f}{f_o} = \frac{10\text{k}}{20\text{k}} = 0,5$$

Fasen bliver

$$\phi(10\text{k}) = -M\gamma\pi = -\frac{5\pi}{2}$$



$|H(f)|$ [dB]
$\phi(f)$ [°]
0
-20
-40
-60
0
-200
-400
-600
-800
$|H(f)|$
$\phi(f)$
0
5k
10k
15k
20k
f [Hz]

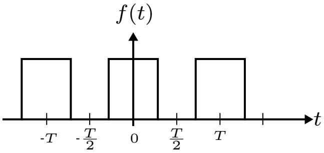
Design af FIR-filter

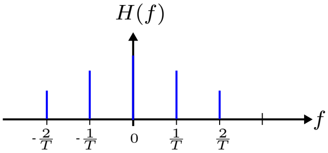
Introduktion

Vi benytter *Fourierkoefficientmetoden* til udregning af FIR-filtres koefficienter. Denne metode er basseret på Fouriertransformation af amplitudesprekret af det ønskede filter.

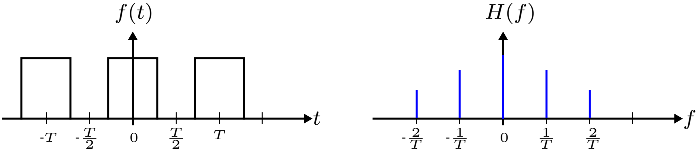
Vi benytter *Fourierkoefficientmetoden* til udregning af FIR-filtres koefficienter. Denne metode er basseret på Fouriertransformation af amplitudesprekret af det ønskede filter.

Ved Fouriertransformation kan et periodisk signal $f(t)$ med periode T opløses i et uendeligt antal diskrete frekvenskomposanter ved frekvenser der er heltalsmultipla af grundfrekvensen $f_1 = 1/T$.

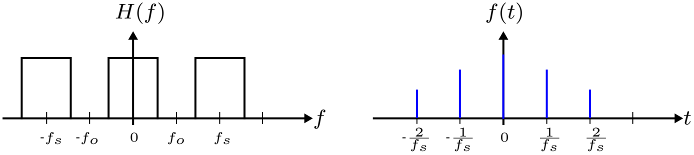




Ved Fouriertransformation kan et periodisk signal $f(t)$ med periode T opløses i et uendeligt antal diskrete frekvenskomposanter ved frekvenser der er heltalsmultipla af grundfrekvensen $f_1 = 1/T$.



Da filtrets amplitudekarakteristik $|H(f)|$ er periodisk med f_s kan denne også Fouriertransformeres. Så fåes et signal med diskrete værdier ved heltalsmultipla af $1/f_s$.



Lad $f(t)$ være en periodisk funktion med periodetid T og Fourierkoefficienter c_m. Så kan $f(t)$ udtrykkes

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi m f_1 t}$$

hvor f_1 er grundfrekvensen ($f_1 = 1/T$). Samtidig kan Fourierkoefficienterne udtrykkes

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi m f_1 t} dt$$

Design af FIR-filter

Fourier transformation af $|H(s)|$

Fouriertransformation kan benyttes til alle periodiske signaler inklusiv frekvensresponsfunktionen $|H(s)|$, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi mTf}$$

og Fourierkoefficienterne kan udtrykkes

$$c_m = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)| e^{-j2\pi mTf} df$$

Et FIR-filter har et endeligt impulsrespons. Derfor afskæres Fourierrækken for $|H(f)|$ til $2M+1$ led, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{j2\pi mTf}$$

Fourierkoefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{f_s}\int_{-f_o}^{f_o} |H(f)| e^{-j2\pi mTf} df \\ &= \frac{1}{f_s}\int_{-f_o}^{f_o} |H(f)|(\cos(2\pi mTf) - j\sin(2\pi mTf))df \end{aligned}$$

Et FIR-filter har et endeligt impulsrespons. Derfor afskæres Fourierrækken for $|H(f)|$ til $2M+1$ led, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{j2\pi mTf}$$

Fourierkoefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{f_s}\int_{-f_o}^{f_o} |H(f)| e^{-j2\pi mTf} df \\ &= \frac{1}{f_s}\int_{-f_o}^{f_o} |H(f)|(\cos(2\pi mTf) - j\sin(2\pi mTf))df \end{aligned}$$

For at filtret har lineær fase skal koefficienterne have enten rene cosinus komposanter eller rene sinus komposanter.

Design af FIR-filter
Fourier transformation

Et FIR-filter har et endeligt impulsrespons. Derfor afskæres Fourierrækken for $|H(f)|$ til $2M+1$ led, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{j2\pi mTf}$$

Fourierkoefficienterne er givet ved

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{f_s}\int_{-f_o}^{f_o} |H(f)| e^{-j2\pi mTf}\, df \\ &= \frac{1}{f_s}\int_{-f_o}^{f_o} |H(f)| (\cos(2\pi mTf) - j\sin(2\pi mTf))\, df \end{aligned}$$

For at filtret har lineær fase skal koefficienterne have enten rene cosinus komposanter eller rene sinus komposanter.

Bemærk at dette filter ikke er kausalt.

Design af FIR-filter
Fourier transformation af lige funktion

Da lavpas, højpas, båndpas og båndstopfiltre er genereret at et amplituderespons, der er en lige funktion antages dette i det følgende, hvorved Fourierkoefficienterne er givet ved

$$c_m = \frac{1}{f_s} \int_{-f_o}^{f_o} |H(f)| \cos(2\pi m T f) df$$

Design af FIR-filter
Fourier transformation af lige funktion

Da lavpas, højpas, båndpas og båndstopfiltre er genereret at et amplituderespons, der er en lige funktion antages dette i det følgende, hvorved Fourierkoefficienterne er givet ved

$$c_m = \frac{1}{f_s} \int_{-f_o}^{f_o} |H(f)| \cos(2\pi m T f) df$$

Da integranten er en lige funktion kan koefficienterne udregnes som

$$c_m = c_{-m} = \frac{2}{f_s} \int_{0}^{f_o} |H(f)| \cos(2\pi m T f) df$$

Ud fra

$$|H(f)| = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{j2\pi mTf} \qquad \text{og} \qquad z = e^{j2\pi fT}$$

ses det at

$$H(z) = \sum_{m=-M}^{M} c_m z^m$$

Da dette filter ikke er kausalt, introduceres en forsinkelse på M samples

$$H(z) = z^{-M} \sum_{m=-M}^{M} c_m z^m = \sum_{m=-M}^{M} c_m z^{m-M} = \sum_{i=0}^{2M} c_{M-i} z^{-i}$$

Design af FIR-filter

Filterkoefficienter

Ud fra

$$|H(f)| = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{j2\pi mTf} \qquad \text{og} \qquad z = e^{j2\pi fT}$$

ses det at

$$H(z) = \sum_{m=-M}^{M} c_m z^m$$

Da dette filter ikke er kausalt, introduceres en forsinkelse på M samples

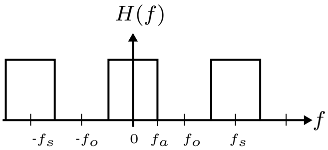
$$H(z) = z^{-M} \sum_{m=-M}^{M} c_m z^m = \sum_{m=-M}^{M} c_m z^{m-M} = \sum_{i=0}^{2M} c_{M-i} z^{-i}$$

Ud fra ovenstående formel kan filterkoefficienterne bestemmes ved

$$a_i = c_{M-i}$$

Et ideelt lavpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < f < f_a \\ 0 & \text{for } f_a < f < f_o \end{cases}$$



Et ideelt lavpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < f < f_a \\ 0 & \text{for } f_a < f < f_o \end{cases}$$

Lavpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_0^{f_a} 1 \cdot \cos(2\pi m T f) d2\pi m T f \\ &= \frac{1}{m\pi} [\sin(2\pi m T f)]_{f=0}^{f_a} \\ &= \frac{1}{m\pi} \sin(2\pi m T f_a) \end{aligned}$$

Et ideelt lavpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < f < f_a \\ 0 & \text{for } f_a < f < f_o \end{cases}$$

Lavpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_0^{f_a} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf \\ &= \frac{1}{m\pi} [\sin(2\pi mTf)]_{f=0}^{f_a} \\ &= \frac{1}{m\pi} \sin(2\pi mTf_a) \end{aligned}$$

Sidste koefficient er (ved brug af L'Hospitals regel)

$$c_0 = 2Tf_a \frac{\sin(2\pi mTf_a)}{2\pi mTf_a} = 2Tf_a$$

Ønskes et lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz via FIR-filter med 23 samples fås

$$M = \frac{23 - 1}{2} = 11$$

Ønskes et lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz via FIR-filter med 23 samples fås

$$M = \frac{23-1}{2} = 11$$

Koefficienterne kan dermed findes ud fra Fourierkoefficienterne som

$$a_i = a_{22-i} = c_{11-i}$$

Ønskes et lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 2$ kHz via FIR-filter med 23 samples fås

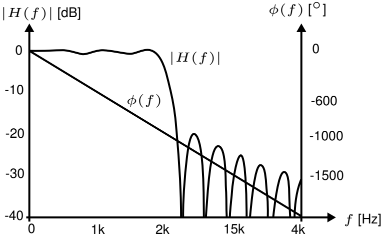
$$M = \frac{23 - 1}{2} = 11$$

Koefficienterne kan dermed findes ud fra Fourierkoefficienterne som

$$a_i = a_{22-i} = c_{11-i}$$

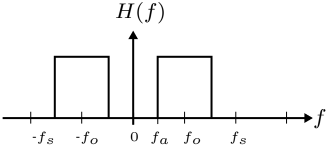
Koefficienterne kan dermed udregnes fra tidligere formler.

Lavpasfilter
Eksempel (II)



Et ideelt højpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < f < f_a \\ 1 & \text{for } f_a < f < f_o \end{cases}$$



Et ideelt højpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < f < f_a \\ 1 & \text{for } f_a < f < f_o \end{cases}$$

Højpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_{f_a}^{f_o} 1 \cdot \cos(2\pi m T f) d2\pi m T f \\ &= \frac{1}{m\pi} [\sin(2\pi m T f)]_{f=f_a}^{f_o} \\ &= \frac{1}{m\pi} (\sin(m\pi) - \sin(2\pi m T f_a)) \end{aligned}$$

Et ideelt højpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < f < f_a \\ 1 & \text{for } f_a < f < f_o \end{cases}$$

Højpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_{f_a}^{f_o} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf \\ &= \frac{1}{m\pi} [\sin(2\pi mTf)]_{f=f_a}^{f_o} \\ &= \frac{1}{m\pi} (\sin(m\pi) - \sin(2\pi mTf_a)) \end{aligned}$$

Sidste koefficient er (ved brug af L'Hospitals regel)

$$c_0 = 1 - 2Tf_a$$

Båndpasfilter

Et ideelt båndpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndpasfilter

Udregning af koefficienter

Et ideelt båndpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_{f_{a_1}}^{f_{a_2}} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf \\ &= \frac{1}{m\pi} (\sin(2\pi mTf_{a_2}) - \sin(2\pi mTf_{a_1})) \end{aligned}$$

Båndpasfilter
Udregning af koefficienter

Et ideelt båndpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_{f_{a_1}}^{f_{a_2}} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf \\ &= \frac{1}{m\pi} (\sin(2\pi mTf_{a_2}) - \sin(2\pi mTf_{a_1})) \end{aligned}$$

Sidste koefficient er (ved brug af L'Hospitals regel)

$$c_0 = 2T(f_{a_2} - f_{a_1})$$

Båndpasfilter
Udregning af koefficienter

Et ideelt båndpasfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndpasfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi} \int_{f_{a_1}}^{f_{a_2}} 1 \cdot \cos(2\pi m T f) d2\pi m T f \\ &= \frac{1}{m\pi} (\sin(2\pi m T f_{a_2}) - \sin(2\pi m T f_{a_1})) \end{aligned}$$

Sidste koefficient er (ved brug af L'Hospitals regel)

$$c_0 = 2T(f_{a_2} - f_{a_1})$$

Dette giver en centerfrekvens

$$f_c = \frac{f_{a_2} - f_{a_1}}{2}$$

Et ideelt båndstopfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Et ideelt båndstopfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndstopfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi}\int_0^{f_{a_1}} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf + \frac{1}{m\pi}\int_{f_{a_2}}^{f_o} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf \\ &= \frac{1}{m\pi}(\sin(m\pi) + \sin(2\pi mTf_{a_1}) - \sin(2\pi mTf_{a_2})) \end{aligned}$$

Båndstopfilter
Udregning af koefficienter

Et ideelt båndstopfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndstopfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} &= \frac{1}{m\pi}\int_0^{f_{a_1}} 1\cdot\cos(2\pi mTf)d2\pi mTf + \frac{1}{m\pi}\int_{f_{a_2}}^{f_o} 1\cdot\cos(2\pi mTf)d2\pi mTf \\ &= \frac{1}{m\pi}(\sin(m\pi) + \sin(2\pi mTf_{a_1}) - \sin(2\pi mTf_{a_2})) \end{aligned}$$

Sidste koefficient er (ved brug af L'Hospitals regel)

$$c_0 = 1 - 2T(f_{a_2} - f_{a_1})$$

Et ideelt båndstopfilter har følgende amplitudekarakteristik

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{for } f_{a_1} < f < f_{a_2} \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Båndstopfiltrets koefficienter kan derfor beregnes som (for $m \neq 0$)

$$c_m = c_{-m} = \frac{1}{m\pi} \int_0^{f_{a_1}} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf + \frac{1}{m\pi} \int_{f_{a_2}}^{f_o} 1 \cdot \cos(2\pi mTf) d2\pi mTf$$
$$= \frac{1}{m\pi} (\sin(m\pi) + \sin(2\pi mTf_{a_1}) - \sin(2\pi mTf_{a_2}))$$

Sidste koefficient er (ved brug af L'Hospitals regel)

$$c_0 = 1 - 2T(f_{a_2} - f_{a_1})$$

Dette giver en centerfrekvens

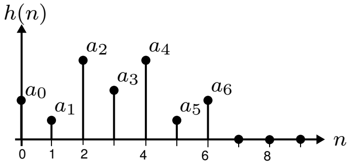
$$f_c = \frac{f_{a_2} - f_{a_1}}{2}$$

Opsummering

Et *finite impulse response* filter (FIR-filter) med N samples har impulsresponssekvens

$$h(n) = \begin{cases} a_n & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Filtret har N koefficienter a_n for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.



Et FIR-filter med $N \geq 2$ samples har *lineær fase* hvis dets impulsrespons er symmetrisk omkring midtpunktet, dvs.

$$h(i) = h(N-1-i) \qquad \text{for } i = 0, 1, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor - 1$$

Et FIR-filter har lineær fase hvis nulpunkterne er i par, så hvis der er et nulpunkt i $z = r\angle\phi$ så er der også et nulpunkt i $z = 1/r\angle\phi$.

Følgende viser en oversigt over Fourierkoefficienter for de fire filtertyper.

Filtertype	$\boldsymbol{c_0}$	$\boldsymbol{c_m = c_{-m}}$	$\boldsymbol{a_i}$
Lavpas	$2Tf_a$	$\frac{1}{m\pi}\sin(2\pi mTf_a)$	c_{M-i}
Højpas	$1-2Tf_a$	$\frac{1}{m\pi}(\sin(m\pi)-\sin(2\pi mTf_a))$	c_{M-i}
Båndpas	$2T(f_{a_2}-f_{a_1})$	$\frac{1}{m\pi}(\sin(2\pi mTf_{a_2})-\sin(2\pi mTf_{a_1}))$	c_{M-i}
Båndstop	$1-2T(f_{a_2}-f_{a_1})$	$\frac{1}{m\pi}(\sin(m\pi)+\sin(2\pi mTf_{a_1})-\sin(2\pi mTf_{a_2}))$	c_{M-i}