Lektion 11: Design af FIR-filtre

Signalbehandling

Christoffer Sloth
`chsl@mmmi.sdu.dk`

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

Agenda

Introduktion

Vinduesfunktioner
- Introduktion
- Rektangulær vinduet
- Bartlett vinduet
- Hamming og Hanning vinduet
- Kaiser vinduet

Design af FIR-filtre

Opsummering

Introduktion
Pensum for Signalbehandling

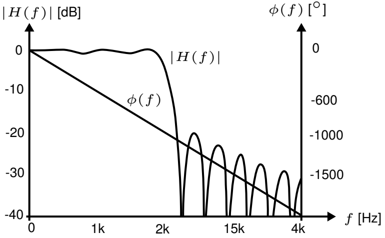
Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

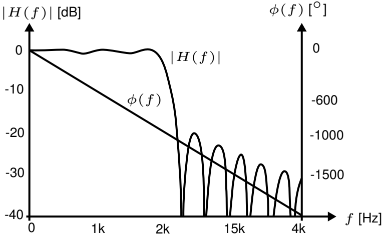
[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

I sidste lektion blev det konkluderet at pasbånds- og stopbåndsripplen ved FIR-filtre er for stor.



I sidste lektion blev det konkluderet at pasbånds- og stopbåndsripplen ved FIR-filtre er for stor.



For at mindske ripplen, så introduceres *vinduesfunktioner*.

Vinduesfunktioner

Fourierkoefficientmetoden benyttes til at finde FIR-filtres koefficienter ved Fouriertransformation af frekvensresponsfunktionen $|H(f)|$, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi mTf}$$

og Fourierkoefficienterne kan udtrykkes

$$c_m = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)| e^{-j2\pi mTf} df$$

Fourierkoefficientmetoden benyttes til at finde FIR-filtres koefficienter ved Fouriertransformation af frekvensresponsfunktionen $|H(f)|$, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi mTf}$$

og Fourierkoefficienterne kan udtrykkes

$$c_m = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)| e^{-j2\pi mTf} df$$

For at opnå et endeligt impulsrespons, så afskæres Fourierrækken for $|H(f)|$ så den har $2M+1$ led, dvs.

$$|H(f)| = \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{j2\pi mTf}$$

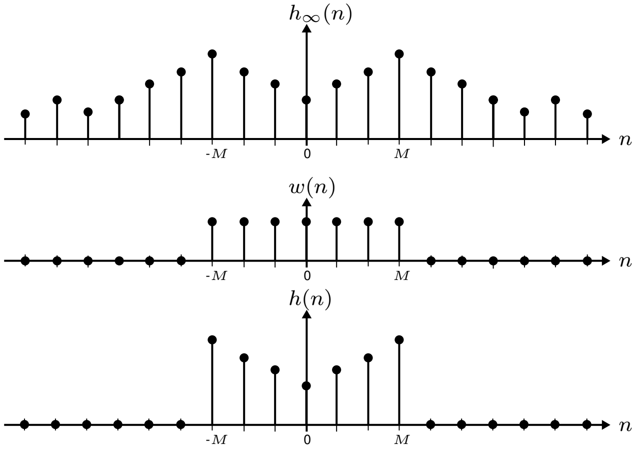
Hvis det tidligere impulsrespons ikke var blevet trunkeret, så ville det være uendeligt - dette kaldes $h_\infty(n)$. For at opnå FIR-filtrets impulsrespons kunne $h_\infty(n)$ ganges med den rektangulære vinduesfunktion, dvs.

$$h(n) = h_\infty(n)w(n)$$

hvor

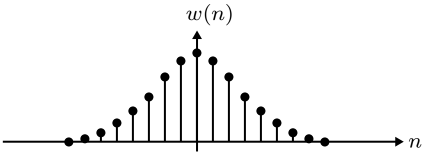
$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

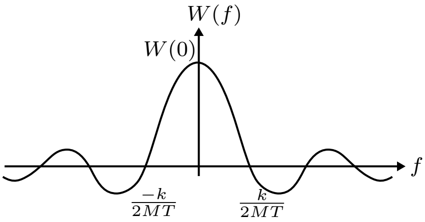
Vinduesfunktioner
Vinduesfunktion (II)



Frekvensresponset for impulsresponssekvensen $h(n)$ fås ved foldning

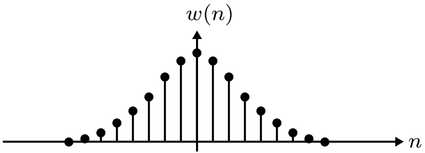
$$
\begin{aligned}
H(f) &= H_\infty(f) * W(f) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H_\infty(f)W(f-F)dF
\end{aligned}
$$

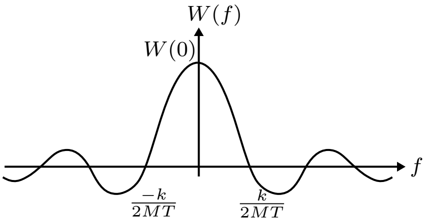




Frekvensresponset for impulsresponssekvensen $h(n)$ fås ved foldning

$$
\begin{aligned}
H(f) &= H_\infty(f) * W(f) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H_\infty(f) W(f-F) dF
\end{aligned}
$$





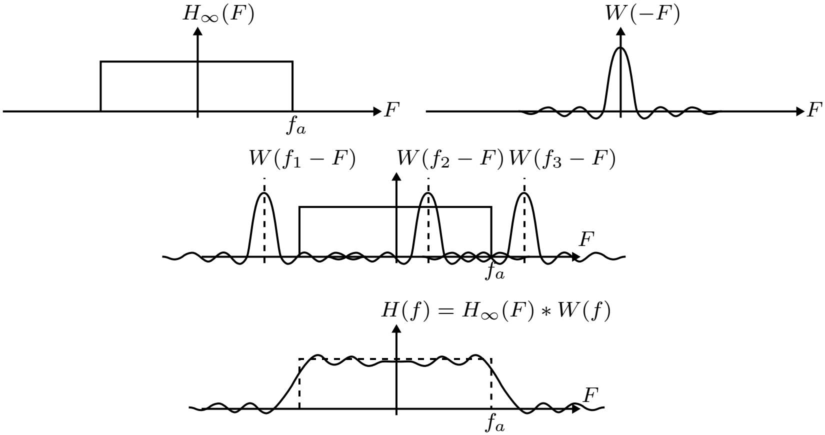
Spektret mellem nulgennemgange omkring 0 Hz kaldes *main lobe*. Resterende spektrum er *side lobes*.

Husk procedure for foldning

$$H(f) = H_\infty(f) * W(f)$$

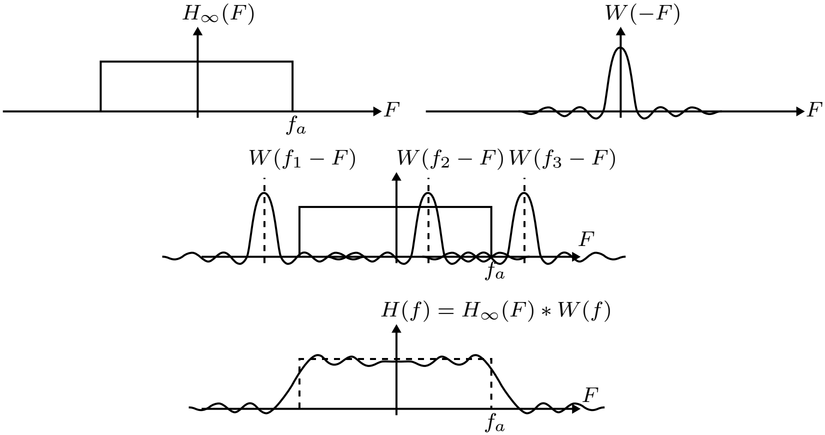
Denne følger proceduren

1. $W(-F)$ findes ved spejling af $W(f)$ omkring y-aksen
2. $W(-F)$ forskydes fra venstre mod højre langs frekvens-aksen.
3. Produktet $H_\infty(F)W(f-F)$ udregnes
4. $H(f)$ er lig arealet under kurven for $H_\infty(F)W(f-F)$



$H_\infty(F)$
F
f_a
$W(-F)$
F
$W(f_1 - F)$
$W(f_2 - F)$
$W(f_3 - F)$
F
f_a
$H(f) = H_\infty(F) * W(f)$
F
f_a

Vinduesfunktioner
Frekvensrespons (III)



Oscillationerne i $H(f)$ kaldes *Gibbs oscillationer* og refereres til som *Gibbs fænomen*.

Vinduesfunktioner

Overblik

En vinduesfunktion ønskes at have følgende karakteristika

- Bredden af main lobe skal være lille. Dette giver en hurtig overgang mellem pasbånd og stopbånd.
- Maksimalamplituden af side lobes skal være lille. Dette giver lille pasbånds- og stopbåndsripple.

Når en vinduesfunktion tilføjes, så svarer dette til en ændring i FIR-filtrets koefficienter.

Når en vinduesfunktion tilføjes, så svarer dette til en ændring i FIR-filtrets koefficienter.

FIR-filtrets nye Fourierkoefficienter c'_m bliver for $-M \leq m \leq M$

$$c'_m = c_m w_m$$

hvor w_m er den $m$te koefficient for vinduesfunktionen og c_m er den $m$the Fourierkoefficient for det ideelle filter.

Vinduesfunktioner
Udregning af filterkoefficienter

Når en vinduesfunktion tilføjes, så svarer dette til en ændring i FIR-filtrets koefficienter.

FIR-filtrets nye Fourierkoefficienter c'_m bliver for $-M \leq m \leq M$

$$c'_m = c_m w_m$$

hvor w_m er den $m$te koefficient for vinduesfunktionen og c_m er den $m$the Fourierkoefficient for det ideelle filter.

Nu kan filterkoefficienterne udregnes som

$$a_i = c'_{M-i}$$

Rektangulær vinduet
Definition

Et rektangulært vindue er defineret som

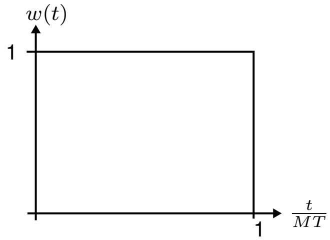
$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

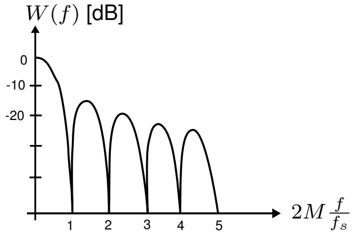
Et rektangulært vindue er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Spektrumfunktionen for det rektangulære filter er

$$W(f) = \frac{\sin(2\pi f M t)}{\pi f}$$



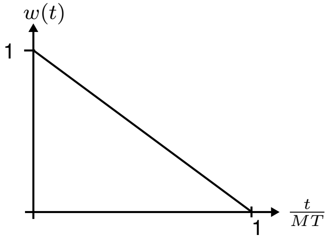


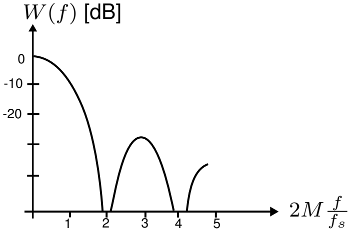
Et Bartlett vindue (triangulært vindue) er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{M} & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Et Bartlett vindue (triangulært vindue) er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{M} & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$





Hamming og Hanning vinduet
Definition

Hamming og Hanning vinduer er defineret som

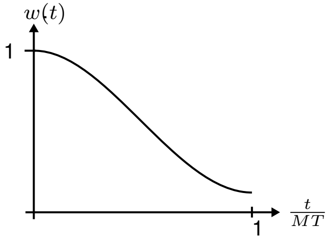
$$w(n) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{m\pi}{M}) & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

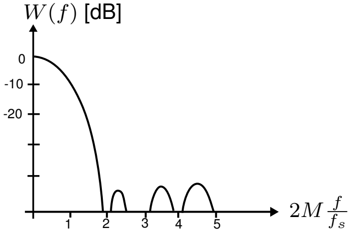
hvor $\alpha = 0,5$ for Hanning vinduet og $\alpha = 0,54$ for Hamming vinduet.

Hamming og Hanning vinduer er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{m\pi}{M}) & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\alpha = 0,5$ for Hanning vinduet og $\alpha = 0,54$ for Hamming vinduet.



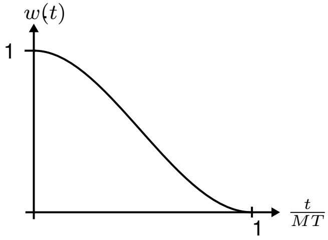


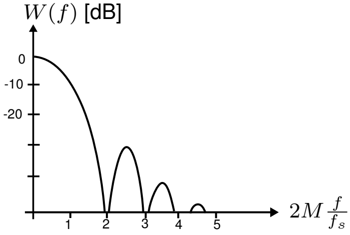
Hamming

Hamming og Hanning vinduer er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{m\pi}{M}) & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\alpha = 0,5$ for Hanning vinduet og $\alpha = 0,54$ for Hamming vinduet.





Hanning

Kaiser vinduet introduceres, da de øvrige vinduer kun har M som parameter, hvilket gør det umuligt at justere main lobe og side lobes uafhængigt af hinanden.

Kaiser vinduet introduceres, da de øvrige vinduer kun har M som parameter, hvilket gør det umuligt at justere main lobe og side lobes uafhængigt af hinanden.

Kaiser vinduer er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{n}{M}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $I_0(x)$ er en nulte ordens Besselfunktion, β er en parameter der justerer primært side lobe amplituden (normalt er β mellem 1 og 10).

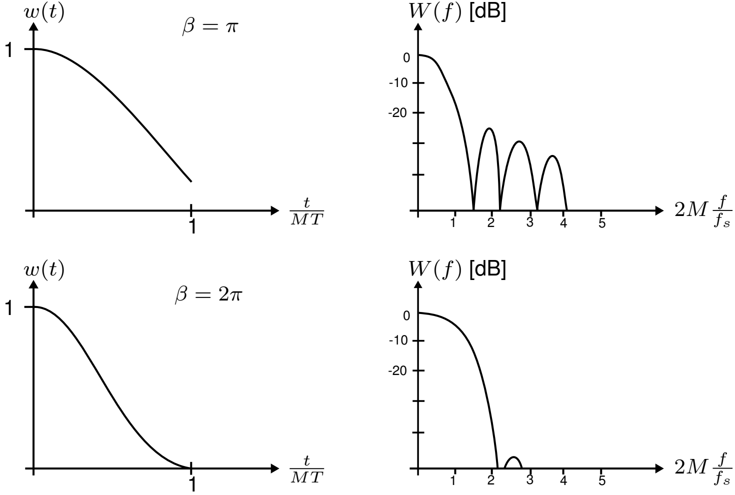
Kaiser vinduet introduceres, da de øvrige vinduer kun har M som parameter, hvilket gør det umuligt at justere main lobe og side lobes uafhængigt af hinanden.

Kaiser vinduer er defineret som

$$w(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{n}{M}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $I_0(x)$ er en nulte ordens Besselfunktion, β er en parameter der justerer primært side lobe amplituden (normalt er β mellem 1 og 10).
Besselfunktionen er defineret som

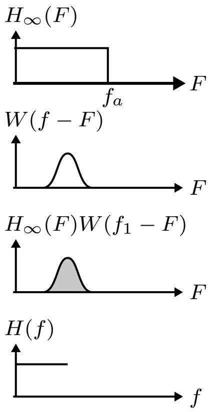
$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right)^2$$



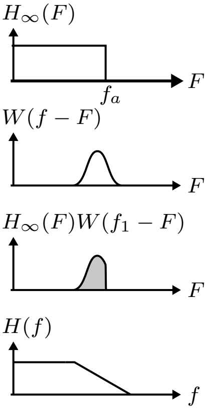
$w(t)$
$\beta = \pi$
1
1
$\frac{t}{MT}$
$W(f)$ [dB]
0
-10
-20
1
2
3
4
5
$2M\,\frac{f}{f_s}$
$w(t)$
$\beta = 2\pi$
1
1
$\frac{t}{MT}$
$W(f)$ [dB]
0
-10
-20
1
2
3
4
5
$2M\,\frac{f}{f_s}$

Når en FIR filter designes skal følgende specificeres

1. Afskæringsfrekvensen f_a
2. Maksimal tilladelig bredde af overgangsområde Δf_a
3. Maksimal tilladelig stopbåndsforstærkning H_s
4. Maksimal tilladelig pasbåndsripple H_r



$H_\infty(F)$
F
f_a
$W(f-F)$
F
$H_\infty(F)W(f_1-F)$
F
$H(f)$
f



$H_\infty(F)$
F
f_a
$W(f-F)$
F
$H_\infty(F)W(f_1-F)$
F
$H(f)$
f

Det ses af sidste slide at overgangsområde $\Delta f_a \approx B$, hvor B er main lobe bredden.

Det ses af sidste slide at overgangsområde $\Delta f_a \approx B$, hvor B er main lobe bredden. Den frekvensnormerede main lobe bredde er

$$B_n = 2M\frac{B}{f_s} = 2M\frac{\Delta f}{f_s}$$

Det ses af sidste slide at overgangsområde $\Delta f_a \approx B$, hvor B er main lobe bredden. Den frekvensnormerede main lobe bredde er

$$B_n = 2M\frac{B}{f_s} = 2M\frac{\Delta f}{f_s}$$

Dermed bliver M-værdien

$$M = \frac{B_n f_s}{2\Delta f}$$

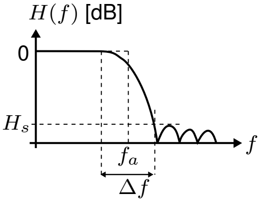
Konstruktionen af et FIR-filter kan forløbe efter følgende procedure

1. **Vælg vinduesfunktion**. Dette valg foretagespå baggrund af specificerede stopbånds- og pasbåndsripple.
2. **Bestem ordenstal**. Ordenstallet $2M$ bestemmes ud fra overgangsområde Δf_a
3. **Beregn filterkoefficienter**. Filterkoefficienterne udregnes som

$$a_i = c_{M-i} w_{M-i}$$

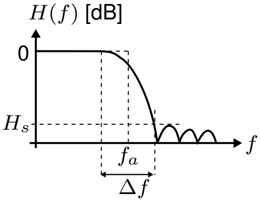
4. **Verifikation**. Filtrets amplitudekarakteristik kontrolleres og om nødvendigt redesignes filtret (M-værdi korrigeres).

Følgende viser filterspecifikationen.



a) $f_a = 1,5$ kHz
b) $\Delta f = 1$ kHz
c) $H_s \leq -50$ dB
d) $f_s = 8$ kHz

Følgende viser filterspecifikationen.



a) $f_a = 1,5$ kHz
b) $\Delta f = 1$ kHz
c) $H_s \leq -50$ dB
d) $f_s = 8$ kHz

Grundet den store stopbåndsdæmpning skal vinduesfunktionen enten være Hamming eller Kaiser. Vi vælger Hamming.

Ordenstallet bestemmes ud fra

$$M = \frac{B_n f_s}{2\Delta f}$$

hvor $B_n = 4$ for et Hamming filter.

Ordenstallet bestemmes ud fra

$$M = \frac{B_n f_s}{2\Delta f}$$

hvor $B_n = 4$ for et Hamming filter.

Dermed fås

$$M \geq \frac{4 \cdot 8000}{2 \cdot 1000} = 16$$

Ordenstallet bestemmes ud fra

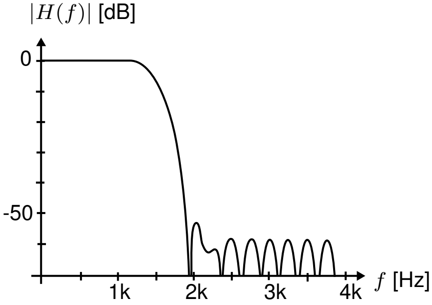
$$M = \frac{B_n f_s}{2\Delta f}$$

hvor $B_n = 4$ for et Hamming filter.

Dermed fås

$$M \geq \frac{4 \cdot 8000}{2 \cdot 1000} = 16$$

Ordenstallet bliver dermed $2M = 32$.



$|H(f)|$ [dB]
0
-50
1k
2k
3k
4k
f [Hz]

Opsummering

Vi betragter følgende vinduesfunktioner

- Rektangulær
- Bartlett
- Hamming
- Hanning
- Kaiser

Ved introduktion af vinduesfunktioner kan Fourierkoefficienter for det modificerede filter udregnes som

$$c'_m = c_m w_m$$

hvor w_m er den $m$te koefficient for vinduesfunktionen og c_m er den $m$the Fourierkoefficient for det ideelle filter. Dermed bliver filterkoefficienterne

$$a_i = c'_{M-i}$$

Opsummering

Designprocedure for FIR-filtre

Konstruktionen af et FIR-filter kan forløbe efter følgende procedure

1. **Vælg vinduesfunktion**. Dette valg foretagespå baggrund af specificerede stopbånds- og pasbåndsripple.
2. **Bestem ordenstal**. Ordenstallet $2M$ bestemmes ud fra overgangsområde Δf_a
3. **Beregn filterkoefficienter**. Filterkoefficienterne udregnes som

$$a_i = c_{M-i} w_{M-i}$$

4. **Verifikation**. Filtrets amplitudekarakteristik kontrolleres og om nødvendigt redesignes filtret (M-værdi korrigeres).