Lektion 2: Sampling og Rekonstruktion

Signalbehandling

Christoffer Sloth
chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

SDU

Agenda

Introduktion

Sampling
- Impulssampling
- Pulssampling

Rekonstruktion

Sekvenser

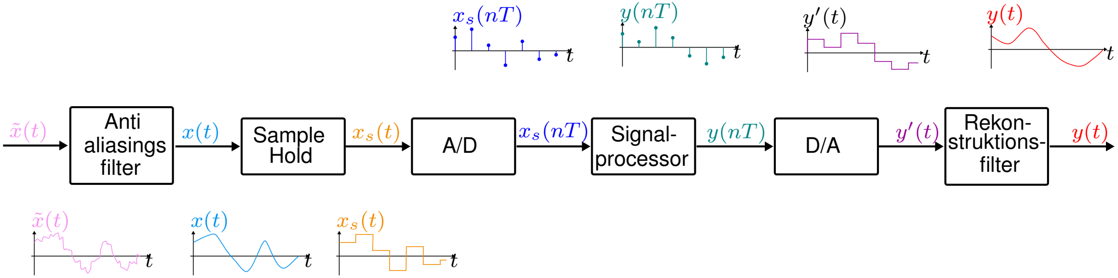
Opsummering

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

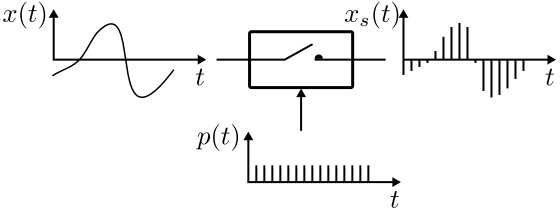
- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 4**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 5**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 6**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 7**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 8**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 10**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 11**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling



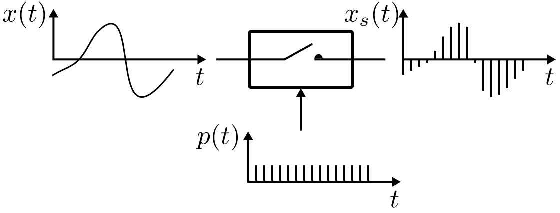
$x_s(nT)$
$y(nT)$
$y'(t)$
$y(t)$
t
$\tilde{x}(t)$
Anti aliasings filter
$x(t)$
Sample Hold
$x_s(t)$
A/D
$x_s(nT)$
Signal-processor
$y(nT)$
D/A
$y'(t)$
Rekon-struktions-filter
$y(t)$
$\tilde{x}(t)$
$x(t)$
$x_s(t)$

Sampling

Indgangssignalet til sampleren er det tidskontinuerte signal $x(t)$, mens samplerens udgangssignal $x_s(t)$ er tidsdiskret (et periodisk pulstog).
Samplekontakten styres af det pulsformede samplesignal $p(t)$.



Indgangssignalet til sampleren er det tidskontinuerte signal $x(t)$, mens samplerens udgangssignal $x_s(t)$ er tidsdiskret (et periodisk pulstog).
Samplekontakten styres af det pulsformede samplesignal $p(t)$.



Sampleren karakteriseres ved dens ***sampleinterval*** T (tid imellem samples) eller ***samplefrekvensen*** givet som

$$f_s = \frac{1}{T} \qquad \text{[Hz]}$$

Ved impulssampling er samplesignalet $p(t)$ defineret som

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

hvor T er sampleintervallet [s] og n er et heltal.

Impulssampling

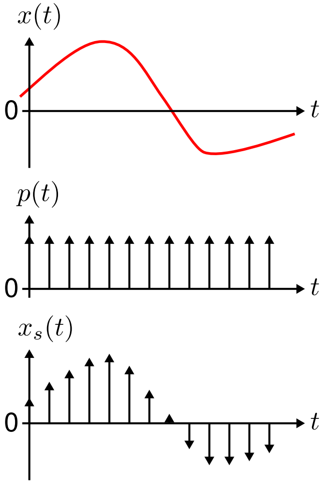
Princip

Ved impulssampling er samplesignalet $p(t)$ defineret som

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

hvor T er sampleintervallet [s] og n er et heltal.
Det samplede signal $x_s(t)$ er dermed

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



Impulssampling
Princip

Ved impulssampling er samplesignalet $p(t)$ defineret som

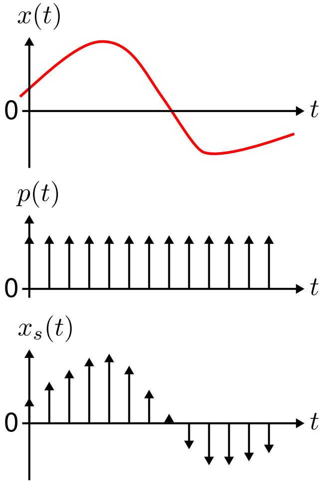
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

hvor T er sampleintervallet [s] og n er et heltal.
Det samplede signal $x_s(t)$ er dermed

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Dette medfører at

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$



Samplesignalet $p(t)$ er periodisk med frekvens f_s, og kan dermed skrives som en uendelig kompleks Fourierrække

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_s t}$$

hvor $\omega_s = 2\pi f_s$ [rad/s].

Samplesignalet $p(t)$ er periodisk med frekvens f_s, og kan dermed skrives som en uendelig kompleks Fourierrække

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_s t}$$

hvor $\omega_s = 2\pi f_s$ [rad/s].

Samplesignalets Fourierkoefficienter er

$$c_m = \frac{1}{T}$$

Det impulssamplede signal $x_s(t)$ kan dermed skrives

$$x_s(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jm\omega_s t}$$

Det impulssamplede signal $x_s(t)$ kan dermed skrives

$$x_s(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jm\omega_s t}$$

Det impulssamplede signals spektrum bliver dermed

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega - m\omega_s)$$

Det impulssamplede signal $x_s(t)$ kan dermed skrives

$$x_s(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jm\omega_s t}$$

Det impulssamplede signals spektrum bliver dermed

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega - m\omega_s)$$

Dette spektrum kan også skrives

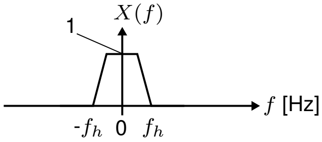
$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$$

Det ses af det impulssamplede signals spektrum

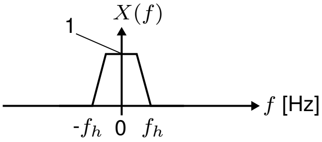
$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$$

at det oprindelige spektrum $X(f)$ er gentaget uendelig mange gange med afstand f_s og at amplituden er skaleret med en faktor $1/T$.

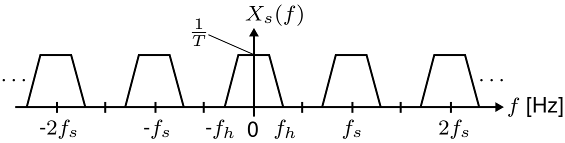
Betragt følgende eksempel spektrum $X(f)$



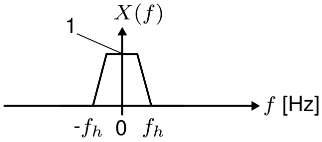
Betragt følgende eksempel spektrum $X(f)$



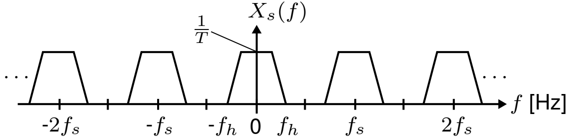
Ved impulssampling fås følgende amplitude spektrum for det impulssamplede signal



Betragt følgende eksempel spektrum $X(f)$



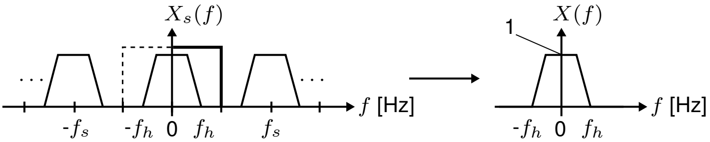
Ved impulssampling fås følgende amplitude spektrum for det impulssamplede signal



Det ses at

- Spektrum $X_s(f)$ er givet af $X(f)$ gentaget uendelig mange gange
- Amplituden af $X_s(f)$ er skaleret men en faktor $1/T$ i forhold til $X(f)$

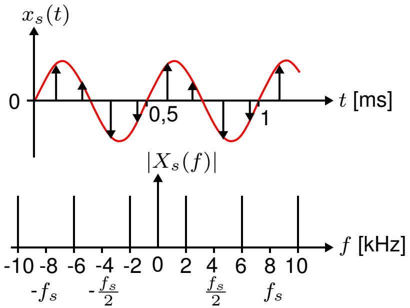
Det ses at amplitudespektrum $X(f)$ kan genskabes ud fra $X_s(f)$ ved lavpasfiltrering.



Betragt signalet

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$

hvor signalets frekvens er $f = 2$ kHz. Signalet impulssamples med en samplefrekvens på 8 kHz.



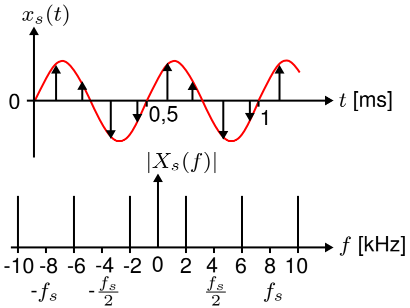
Impulssampling

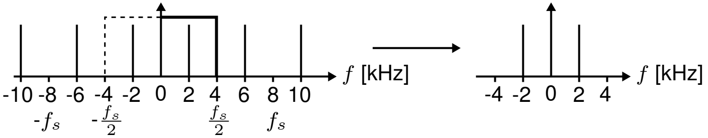
Amplitudespektrum: Eksempel

Betragt signalet

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$

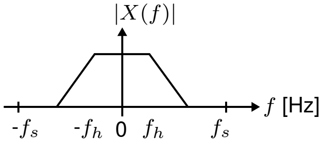
hvor signalets frekvens er $f = 2$ kHz. Signalet impulssamples med en samplefrekvens på 8 kHz.



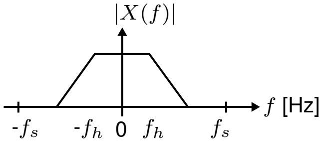


Hvordan skal samplefrekvensen f_s vælges for at det oprindelige spektrum kan genskabes fra det samplede signal?

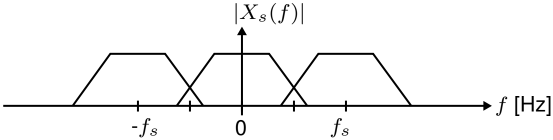
Betragt amplitudespektrum for signalet $x(t)$



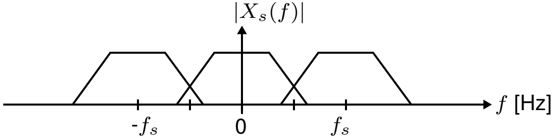
Betragt amplitudespektrum for signalet $x(t)$



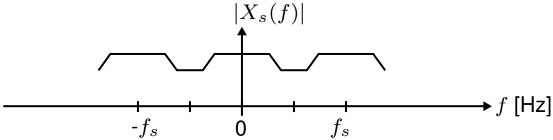
Vælges samplefrekvensen for lavt, så overlapper de gentagede spektre, og dermed opstår **aliasing**.



Vælges samplefrekvensen for lavt, så overlapper de gentagede spektre, og dermed opstår **aliasing**.



Det resulterende amplitudespektrum for $x_s(t)$ bliver som vist herunder. Dette er et aliaseret spektrum.

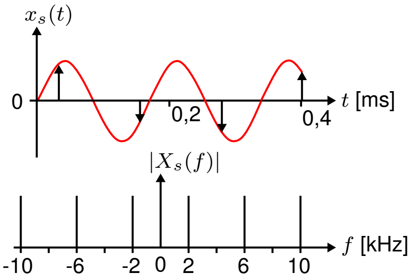


Delspektret centreret om f_s, der går ned i grundspektret kaldes aliaseringskomposanter eller aliaseringsstøj.

Betragt signalet

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$

hvor signalets frekvens er $f = 6$ kHz. Signalet impulssamples med en samplefrekvens på 8 kHz.

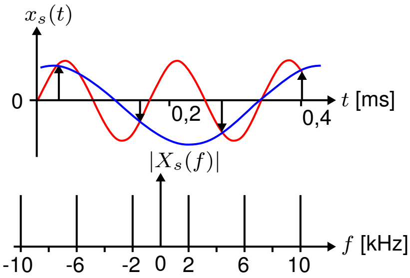


Betragt signalet

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$

hvor signalets frekvens er $f = 6$ kHz. Signalet impulssamples med en samplefrekvens på 8 kHz.

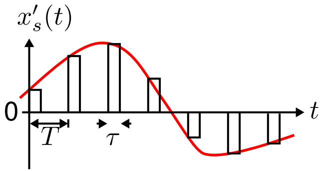
Det ses at der kommer en frekvens på 2 kHz som aliaseringsstøj.



Følgende er et af kursets vigtigste resultater.

Nyquist-Shannon Sætning
Et tidskontinuert signal $x(t)$ kan kun gendannes korrekt ud fra $x_s(t)$, hvis samplefrekvensen er mindst to gange den højeste frekvens i spektrum for $x(t)$.

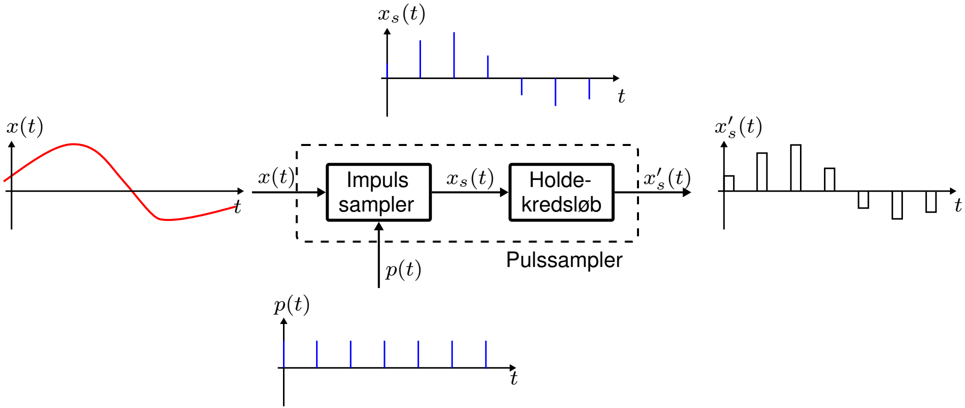
Impulssampling kan ikke realiseres i praksis, da pulsbredden vil blive større end nul. Et pulssamplet signal er vis herunder.



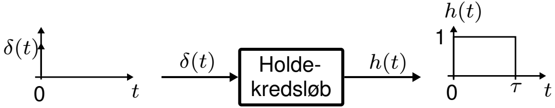
Her er T sampleintervallet [s] og τ er pulsbredden [s].

Denne type sampling benyttes fx af sampling oscilloskoper.

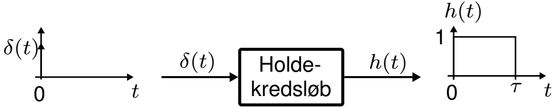
En pulssampler kan modelleres ved brug af en impulssampler og et holdekredsløb.



Virkemåden af en pulssampler med pulsbredde τ er vist i følgende diagram.



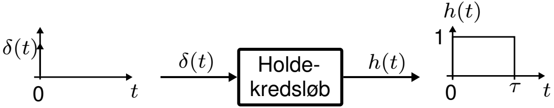
Virkemåden af en pulssampler med pulsbredde τ er vist i følgende diagram.



Det vides at spektrumfunktionen for en rektangulærpuls er

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \tau \mathrm{sinc}(\omega \frac{\tau}{2})$$

Virkemåden af en pulssampler med pulsbredde τ er vist i følgende diagram.



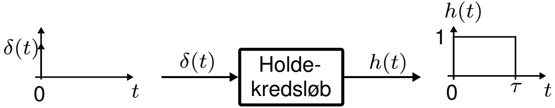
Det vides at spektrumfunktionen for en rektangulærpuls er

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \tau \mathrm{sinc}(\omega \frac{\tau}{2})$$

Holdekredsløbets spektrumfunktion bliver dermed

$$H(\omega) = \tau \mathrm{sinc}(\omega \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}$$

Virkemåden af en pulssampler med pulsbredde τ er vist i følgende diagram.



Det vides at spektrumfunktionen for en rektangulærpuls er

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \tau \mathrm{sinc}(\omega \frac{\tau}{2})$$

Holdekredsløbets spektrumfunktion bliver dermed

$$H(\omega) = \tau \mathrm{sinc}(\omega \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

Dutyfaktoren for det pulssamplede signal er defineret som

$$d = \frac{\tau}{T}$$

Frekvensspektrum for det pulssamplede signal er

$$
\begin{aligned}
X_s'(f) &= X_s(f)H(f) \\
&= \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f-mf_s)}_{X_s(f)}\,\underbrace{\tau\,\mathrm{sinc}(\pi d\frac{f}{f_s})e^{-j\pi d\frac{f}{f_s}}}_{H(f)}
\end{aligned}
$$

Frekvensspektrum for det pulssamplede signal er

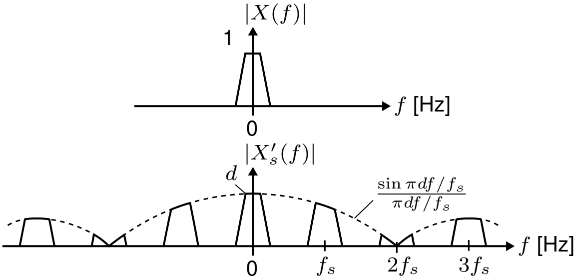
$$\begin{aligned} X_s'(f) &= X_s(f)H(f) \\ &= \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f-mf_s)}_{X_s(f)} \underbrace{\tau \mathrm{sinc}(\pi d \frac{f}{f_s}) e^{-j\pi d \frac{f}{f_s}}}_{H(f)} \end{aligned}$$

Amplitudespektrum bliver dermed

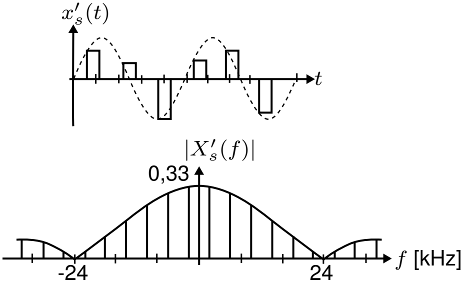
$$|X_s'(f)| = d|\mathrm{sinc}(\pi d \frac{f}{f_s})| \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f-mf_s)$$

Pulssampling

Amplitudespektrum for pulssamplet signal med $d = 0,5$



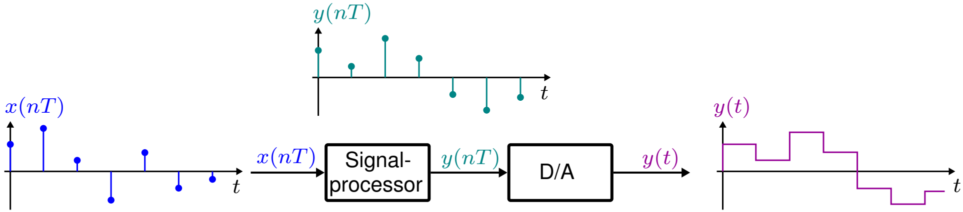
Følgende viser et 2 kHz sinussignal der er samplet med 8 kHz og dutyfaktor 1/3.



Rekonstruktion

Princip

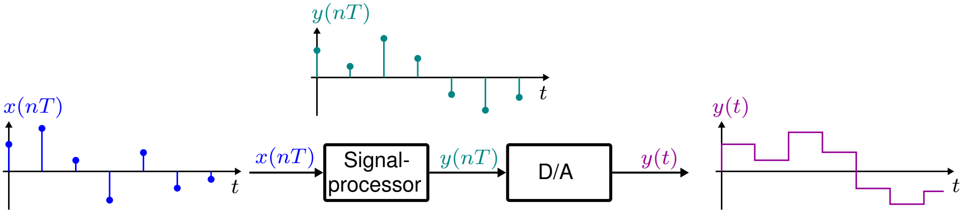
En digital-analog konverter (D/A konverter) rekonstruerer det analoge signal ud fra den digitale sekvens, og kaldes derfor et ***rekonstruktionskredsløb***.



Rekonstruktion

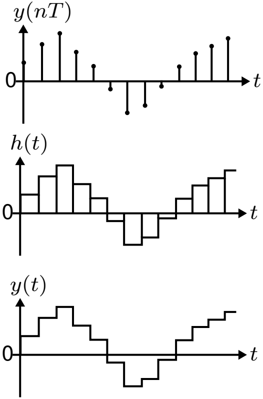
Princip

En digital-analog konverter (D/A konverter) rekonstruerer det analoge signal ud fra den digitale sekvens, og kaldes derfor et ***rekonstruktionskredsløb***.

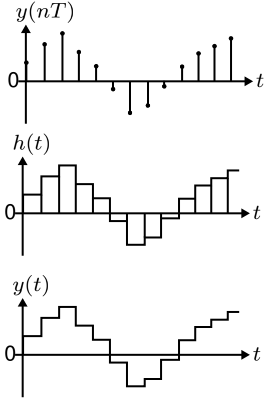


Da D/A konverterens udgangssignal er stykvis konstant med amplitude givet af amplituden for den digitale sekvens er her tale om et ***nul'te ordens holdekredsløb***.

Når en digital sekvens D/A konverteres med brug af nul'te ordens holdekredskøb, så får vi følgende opførsel.



Når en digital sekvens D/A konverteres med brug af nul'te ordens holdekredskøb, så får vi følgende opførsel.



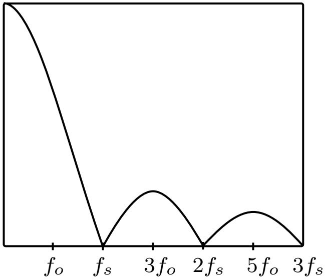
Bemærk at impulsresponset for holdekredsløbet er ligesom for en pulssampler, hvor $\tau = T$ (dutyfaktor på 1).

Fra tidligere vides det at frekvensresponset for et nul'te ordens holdekredsløb med indgangssignal $x(t)$ og udgangssignal $y(t)$ er

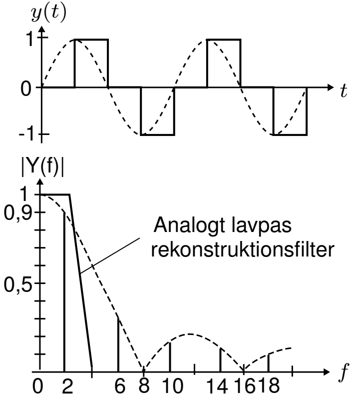
$$|Y(f)| = \left|\frac{\sin \pi f/f_s}{\pi f/f_s}\right| \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_s)$$

Fra tidligere vides det at frekvensresponset for et nul'te ordens holdekredsløb med indgangssignal $x(t)$ og udgangssignal $y(t)$ er

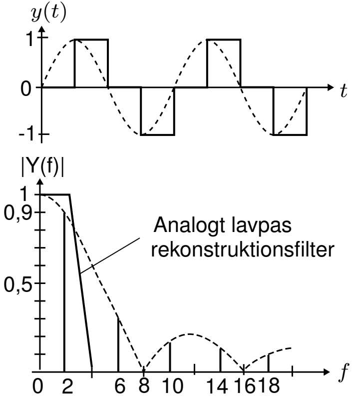
$$|Y(f)| = \left|\frac{\sin \pi f/f_s}{\pi f/f_s}\right| \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$$



Følgende viser rekonstruktion af et 2 kHz sinussignal samplet ved 8 kHz.

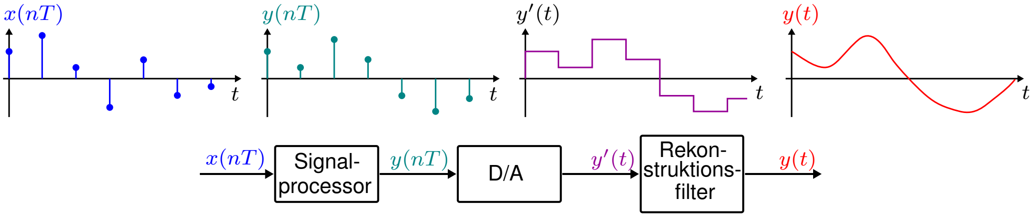


Følgende viser rekonstruktion af et 2 kHz sinussignal samplet ved 8 kHz.

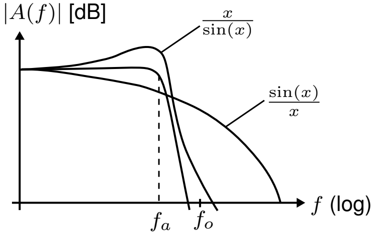


Der indsættes ofte et lavpasfilter efter D/A-konverteren for at dæmpe de højfrekvente komposanter ved $f > f_o$.

For at fjerne frekvenskomponenter med frekvens over f_o fra udgangssignalet tilføjes et lavpasfilter, som kaldes et rekonstruktionsfilter.

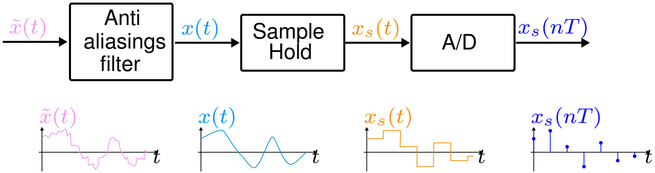


Da sinc-funktionen multipliceres på signalets amplitudespektrum, kan et rekonstruktionsfilter med den resiprokke amplitudekarakteristik tilføjes.



Sekvenser

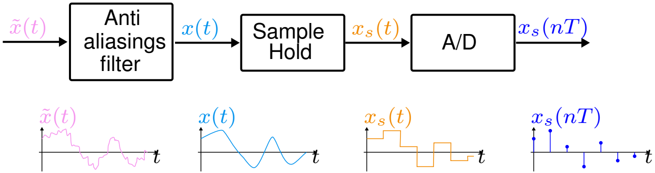
Når analoge signaler skal indlæses på en computer, er det nødvendigt at analog-til-digital (AD) konvertere signalet.



Sekvenser

Definition

Når analoge signaler skal indlæses på en computer, er det nødvendigt at analog-til-digital (AD) konvertere signalet.



Det digitale signal kaldes en sekvens, og representeres ved et endeligt antal bits, hvilket introducerer en kvantiseringsfejl.

I dette kursus betragtes **kausale sekvenser**, dvs.

$$x(nT) = 0 \qquad \text{for } n < 0$$

hvor T er sampleintervallet og n er samplenummeret.

I dette kursus betragtes **kausale sekvenser**, dvs.

$$x(nT) = 0 \qquad \text{for } n < 0$$

hvor T er sampleintervallet og n er samplenummeret.

Sekvenser kan udtrykkes som funktioner af samplenummeret n som vist her

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(kT - nT)$$

Enhedssamplen

Enhedssamplen $\delta(n)$ (digital impuls) er defineret som

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

Enhedssamplen

Enhedssamplen $\delta(n)$ (digital impuls) er defineret som

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

Enhedsspringsamplen

Enhedsspringsamplen $u(n)$ er defineret som

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \neq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Enhedssamplen
Enhedssamplen $\delta(n)$ (digital impuls) er defineret som

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

Enhedsspringsamplen
Enhedsspringsamplen $u(n)$ er defineret som

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \neq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Ved brug af enhedssamplen $\delta(n)$ kan sekvensen $x(n)$ udtrykkes som

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Spektrum for det impulssamplede signal x_s kan findes ved Laplacetransformation af

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Spektrum for det impulssamplede signal x_s kan findes ved Laplacetransformation af

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Fra definitionen af Laplacetransformation fås

$$\begin{aligned}
X_s(s) &= \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\right) \\
&= \int_{t=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}
\end{aligned}$$

Som eksempel betragtes sekvensen

$$x(nT) = e^{-anT}, \qquad a > 0$$

Som eksempel betragtes sekvensen

$$x(nT) = e^{-anT}, \qquad a > 0$$

Fra foregående slide vides det at

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT}$$

Som eksempel betragtes sekvensen

$$x(nT) = e^{-anT}, \qquad a > 0$$

Dette medfører at

$$\begin{aligned} X_s(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-snT} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT} \end{aligned}$$

Fra foregående slide vides det at

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT}$$

Som eksempel betragtes sekvensen

$$x(nT) = e^{-anT}, \qquad a > 0$$

Dette medfører at

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-snT}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT}$$

Fra foregående slide vides det at

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT}$$

For $|x| < 1$ haves den uendelige kvotientrække

$$y_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Som eksempel betragtes sekvensen

$$x(nT) = e^{-anT}, \qquad a > 0$$

Dette medfører at

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-snT}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT}$$

Udtrykket for $X_s(s)$ kan således skrives

$$X_s(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}}$$

Fra foregående slide vides det at

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT}$$

For $|x| < 1$ haves den uendelige kvotientrække

$$y_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Overføringsfunktionen

$$X_s(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}}$$

har polerne

$$s = -a \pm jm\frac{2\pi}{T} = -a \pm jm2\pi f_s$$

hvor m er et heltal.

Overføringsfunktionen

$$X_s(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}}$$

har polerne

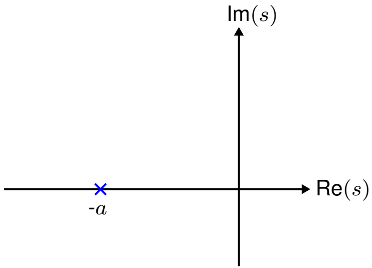
$$s = -a \pm jm\frac{2\pi}{T} = -a \pm jm2\pi f_s$$

hvor m er et heltal. Det vides at den Laplace transformerede af $x(t) = e^{-at}$ er

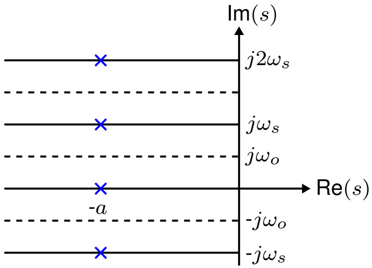
$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

Dette er en overføringsfunktion med en pol i $s = -a$.

Den Laplacetransformerede af $x(t) = e^{-at}$ har en pol i $s = -a$.

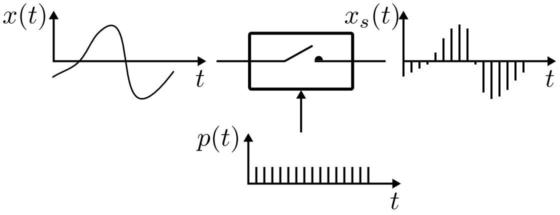


Den Laplacetransformerede af sekvensen $x(nT) = e^{-anT}$ har poler $s = -a \pm jn\omega_s$.



Konklusion: Ved sampling gentages pol-nulpunktsdiagrammet langs imaginær-aksen periodisk med samplefrekvensen.

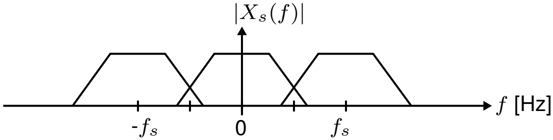
Indgangssignalet til sampleren er det tidskontinuerte signal $x(t)$, mens samplerens udgangssignal $x_s(t)$ er tidsdiskret (et periodisk pulstog). Vi betragter impulssampling og pulssampling.



Sampleren karakteriseres ved dens ***sampleinterval*** T (tid imellem samples) eller ***samplefrekvensen*** givet som

$$f_s = \frac{1}{T} \qquad \text{[Hz]}$$

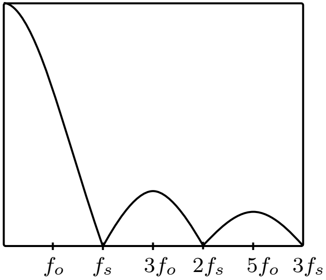
Vælges samplefrekvensen for lavt, så overlapper de gentagede spektre, og dermed opstår **aliasing**.



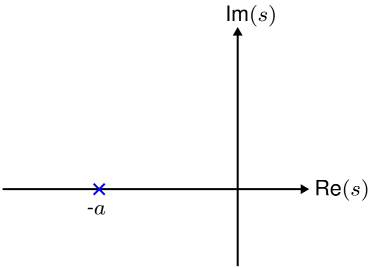
Nyquist-Shannon Sætning
Et tidskontinuert signal $x(t)$ kan kun gendannes korrekt ud fra $x_s(t)$, hvis samplefrekvensen er mindst to gange den højeste frekvens i spektrum for $x(t)$.

Ved rekonstruktion benyttes et nul'te ordens holdekredsløb, hvilket tilføjer en sinc-funktion til spektret for indgangssignal $x(t)$.

$$|Y(f)| = \left| \frac{\sin \pi f/f_s}{\pi f/f_s} \right| \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_s)$$



Den Laplacetransformerede af $x(t) = e^{-at}$ har en pol i $s = -a$.



Den Laplacetransformerede af sekvensen $x(nT) = e^{-anT}$ har poler $s = -a \pm jn\omega_s$.