Lektion 7: Digitale realisationsstrukturer

Signalbehandling

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

Agenda

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

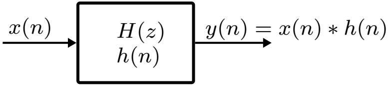
- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

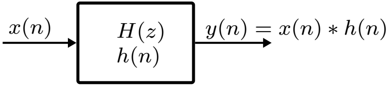
Tidsdiskret foldning
Definition

Tidsdiskret foldning kan benyttes til udregning af udgangssekvensen for et tidsdiskret system ved brug af indgangssekvensen $x(n)$ og impulsresponset $h(n)$.



Tidsdiskret foldning
Definition

Tidsdiskret foldning kan benyttes til udregning af udgangssekvensen for et tidsdiskret system ved brug af indgangssekvensen $x(n)$ og impulsresponset $h(n)$.

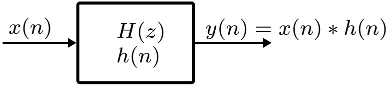


Foldningssummen er defineret som

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$$

Tidsdiskret foldning
Definition

Tidsdiskret foldning kan benyttes til udregning af udgangssekvensen for et tidsdiskret system ved brug af indgangssekvensen $x(n)$ og impulsresponset $h(n)$.



Foldningssummen er defineret som

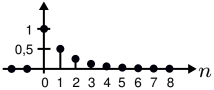
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$$

Udgangssekvensen $y(n)$ kan også udregnes ved

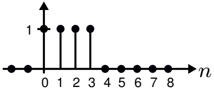
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

Vi betragter et system med følgende impulsrespons og indgangssekvens.

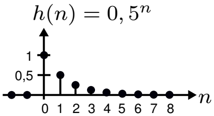
$h(n) = 0,5^n$

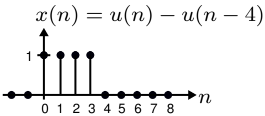


$x(n) = u(n) - u(n-4)$



Vi betragter et system med følgende impulsrespons og indgangssekvens.





Det ønskes at bestemme udgangssekvensen $y(n)$ ved brug af tidsdiskret foldning

$$y(n) = h(n) * x(n) = 0,5^n * [u(n) - u(n-4)]$$

hvor $u(n)$ er enhedsspringsekvensen.

Tidsdiskret foldning
Eksempel (II)

Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

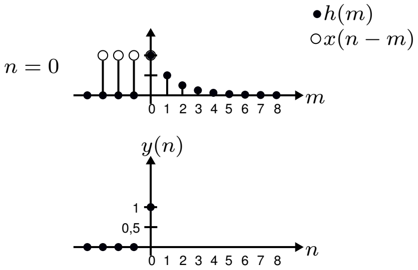
Tidsdiskret foldning
Eksempel (II)

Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$



Tidsdiskret foldning
Eksempel (II)

Udgangssekvensen udregnes ved brug af

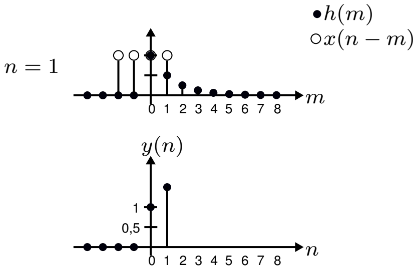
$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$



Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

For $n = 0$ haves

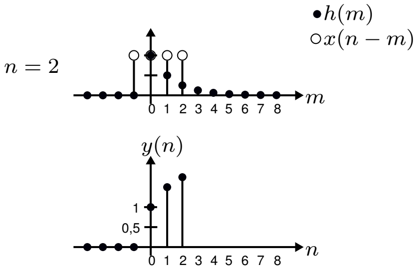
$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

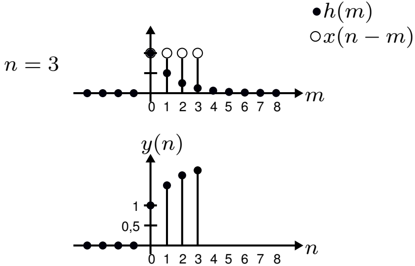
For $n = 2$ haves

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$



Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$



For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

For $n = 2$ haves

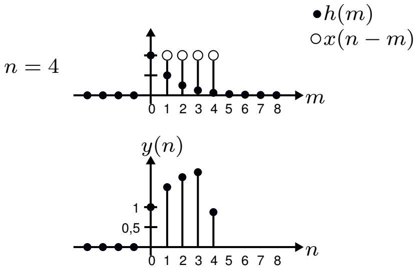
$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$

For $n = 3$ haves

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$$

Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$



For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

For $n = 2$ haves

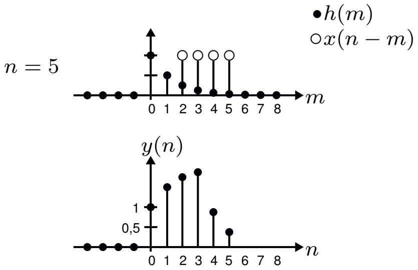
$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$

For $n = 3$ haves

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$$

Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$



For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

For $n = 2$ haves

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$

For $n = 3$ haves

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$$

Tidsdiskret foldning
Eksempel (II)

Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

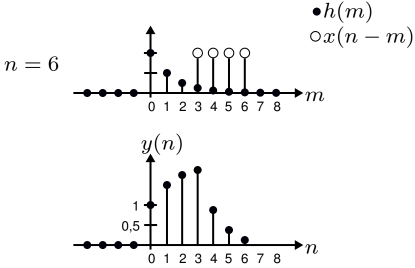
$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

For $n = 2$ haves

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$

For $n = 3$ haves

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$$



Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

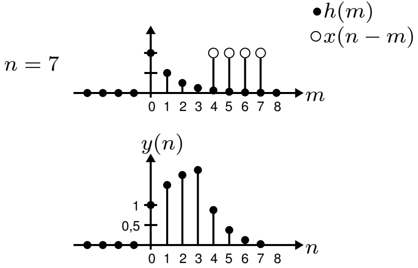
$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

For $n = 2$ haves

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$

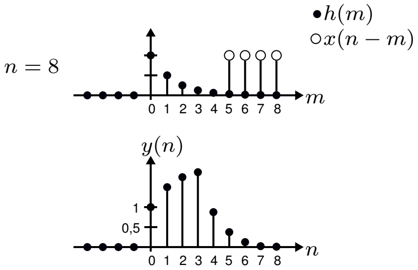
For $n = 3$ haves

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$$



Udgangssekvensen udregnes ved brug af

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$



For $n = 0$ haves

$$y(0) = h(0)x(0)$$

For $n = 1$ haves

$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$$

For $n = 2$ haves

$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$$

For $n = 3$ haves

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$$

Den z-transformerede af en kausal sekvens $x(n)$ er defineret som

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

hvor $z \in \mathbb{C}$.

Laplacetransformation af signalet $x(t)$ er defineret som

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

hvor $s \in \mathbb{C}$.

Overblik over z-domæneanalyse

System beskrivelse

Vi betragter en differensligning kan skrives som

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

Ved z-transformation fås overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

Vi betragter en differentialligning kan skrives som

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{(i)}(t) - \sum_{i=1}^{N} b_i y^{(i)}(t)$$

Ved Laplacetransformation fås overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i s^{i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i s^{i}}$$

Et systems frekvensrespons er responset (udgangssignalet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

For at studere et tidsdiskret systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for z, der ligger på enhedscirklen, dvs.

$$z = e^{j\omega T}$$

Frekvensresponset er givet af

$$M(\omega) = |H(e^{j\omega T})| \text{ og } \varphi(\omega) = \angle H(e^{j\omega T})$$

For at studere et tidskontinuert systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for s, der ligger på imaginæraksen, dvs.

$$s = j\omega$$

Frekvensresponset er givet af

$$M(\omega) = |H(j\omega)| \text{ og } \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

Lad $H(z)$ være overføringsfunktionen for et tidsdiskret system med poler $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{C}$. Så gælder det at systemet er **stabilt** hvis alle poler ligger indenfor enhedscirklen, dvs.

$$|p_i| < 1 \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, N$$

Lad $H(s)$ være overføringsfunktionen for et tidskontinuert system med poler $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{C}$. Så gælder det at systemet er **stabilt** hvis alle poler ligger i venstre halvplan, dvs.

$$\mathtt{Re}(p_i) < 0 \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, N$$

En enhedssample $\delta(n)$ er en sekvens givet som

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Impulsresponset for et tidsdiskret system kaldes $h(n)$, og er identisk med systemets udgangssekvens når inputsekvensen er en enhedssample $\delta(n)$.

En **impuls** $\delta(t)$ er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = u(t)$$

hvor u er en kontinuerlig funktion og δ er en Dirac delta-funktion.

Impulsresponset $h(t-\tau)$ for et lineært tidsinvariant system defineres som responset (outputtet) til tiden t når en impuls er tilføjet som input til tiden τ.

Udgangssekvensen $y(n)$ kan også udregnes ved

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

For lineære tidsinvariante systemer gælder det at

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Denne ligning kaldes **foldningsintegralet**.

Direkte realisationsstrukturer

I det følgende tages der udgangspunkt i differensligningen

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

I det følgende tages der udgangspunkt i differensligningen

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

Ved z-transformation fås følgende overføringsfunktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

I det følgende tages der udgangspunkt i differensligningen

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

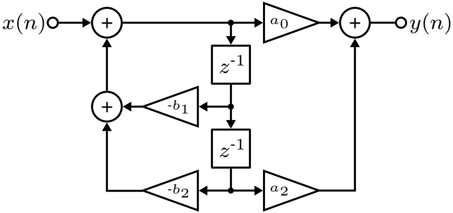
Ved z-transformation fås følgende overføringsfunktion

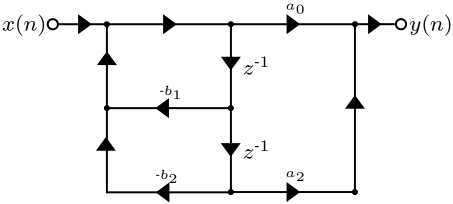
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

Differensligningen kan implementeres på flere måder. Vi kigger på

- Direkte type 1 strukturen
- Direkte type 2 strukturen

Blokdiagrammer og signalgrafer benyttes til at illustrere implementeringen af tidsdiskrete systemer.





Følgende differensligning ønskes implementeret

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

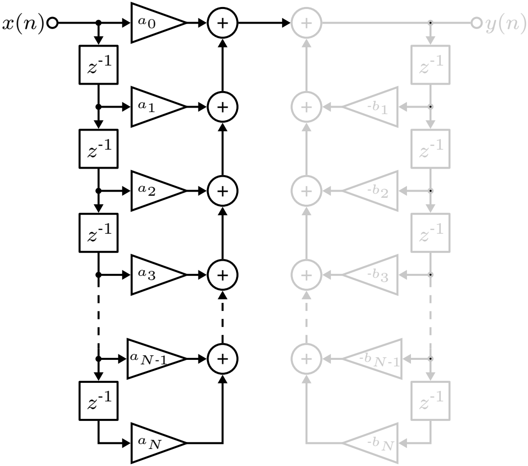
Direkte type 1
Overblik

Følgende differensligning ønskes implementeret

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

Første del af strukturen er

$$\sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$



Følgende differensligning ønskes implementeret

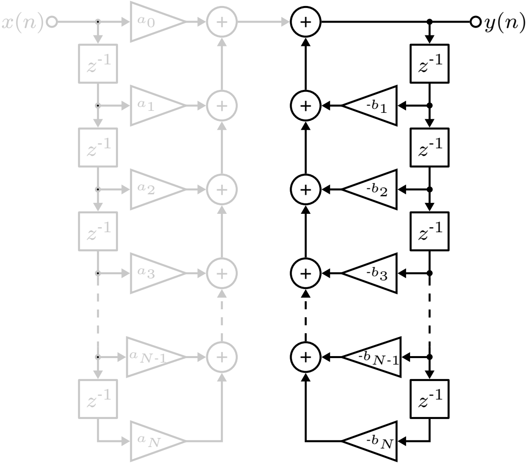
$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

Første del af strukturen er

$$\sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$

Anden del af strukturen er

$$-\sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$



Følgende differensligning ønskes implementeret

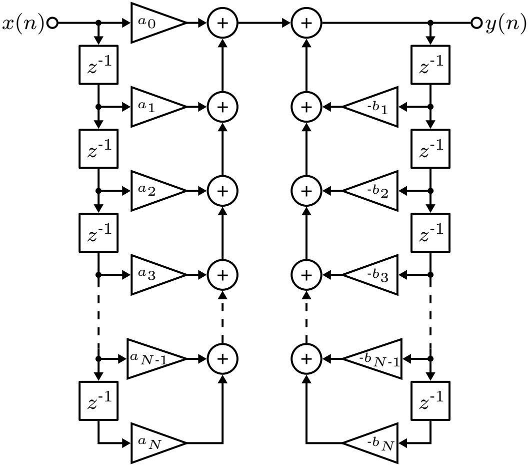
$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

Første del af strukturen er

$$\sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$

Anden del af strukturen er

$$-\sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$



Direkte type 1
Eksempel (I)

Betragt følgende 4. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}$$

givet ved overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,60 - 2,39z^{-1} + 3,60z^{-2} - 2,39z^{-3} + 0,60z^{-4}}{1 - 2,98z^{-1} + 3,43z^{-2} - 1,78z^{-3} + 0,36z^{-4}}$$

Betragt følgende 4. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}$$

givet ved overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,60 - 2,39z^{-1} + 3,60z^{-2} - 2,39z^{-3} + 0,60z^{-4}}{1 - 2,98z^{-1} + 3,43z^{-2} - 1,78z^{-3} + 0,36z^{-4}}$$

Ved invers z-transformation fås

$$\begin{aligned} y(n) - 2,98y(n-1) + 3,43y(n-2) - 1,78y(n-3) + 0,36y(n-4) = {} & 0,60x(n) - 2,39x(n-1) + 3,60x(n-2) \\ & - 2,39x(n-3) + 0,60x(n-4) \end{aligned}$$

Direkte type 1
Eksempel (I)

Betragt følgende 4. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}$$

givet ved overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,60 - 2,39z^{-1} + 3,60z^{-2} - 2,39z^{-3} + 0,60z^{-4}}{1 - 2,98z^{-1} + 3,43z^{-2} - 1,78z^{-3} + 0,36z^{-4}}$$

Ved invers z-transformation fås

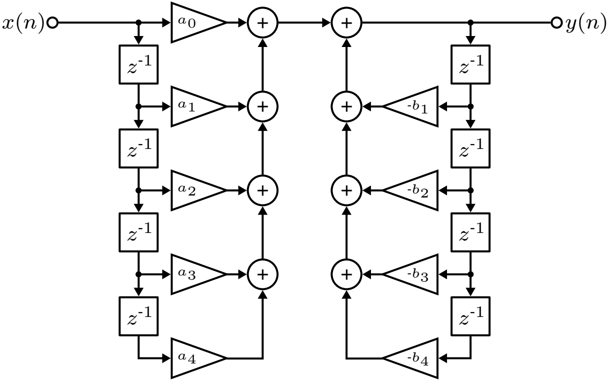
$$\begin{aligned} y(n) - 2,98y(n-1) + 3,43y(n-2) - 1,78y(n-3) + 0,36y(n-4) = {} & 0,60x(n) - 2,39x(n-1) + 3,60x(n-2) \\ & - 2,39x(n-3) + 0,60x(n-4) \end{aligned}$$

Dermed kan $y(n)$ skrives som

$$\begin{aligned} y(n) = {} & 0,60x(n) - 2,39x(n-1) + 3,60x(n-2) - 2,39x(n-3) + 0,60x(n-4) \\ & - (-2,98y(n-1) + 3,43y(n-2) - 1,78y(n-3) + 0,36y(n-4)) \end{aligned}$$

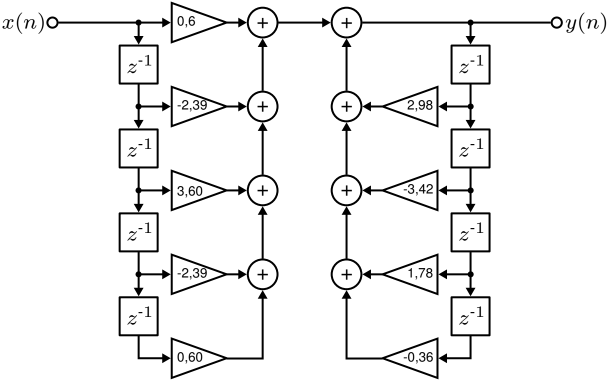
Implementeringen af følgende differensligning er vist i figuren.

$$y(n) = 0,60x(n) - 2,39x(n-1) + 3,60x(n-2) - 2,39x(n-3) + 0,60x(n-4)$$
$$-(-2,98y(n-1) + 3,43y(n-2) - 1,78y(n-3) + 0,36y(n-4))$$



Implementeringen af følgende differensligning er vist i figuren.

$$y(n) = 0,60x(n) - 2,39x(n-1) + 3,60x(n-2) - 2,39x(n-3) + 0,60x(n-4)$$
$$-(-2,98y(n-1) + 3,43y(n-2) - 1,78y(n-3) + 0,36y(n-4))$$



Direkte type 1 strukturen benytter $2N$ forsinkelseselementer, dvs. $2N$ værdier skal gennem i filtret.
Direkte type 2 strukturen benytter kun N forsinkelseselementer, hvilket kræver mindre hukommelse.

Direkte type 2
Motivation

Direkte type 1 strukturen benytter $2N$ forsinkelseselementer, dvs. $2N$ værdier skal gennem i filtret.
Direkte type 2 strukturen benytter kun N forsinkelseselementer, hvilket kræver mindre hukommelse.

Overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

kan skrives som

$$H(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \frac{Y(z)}{W(z)} = \underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}}_{H_1(z)} \underbrace{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}_{H_2(z)}$$

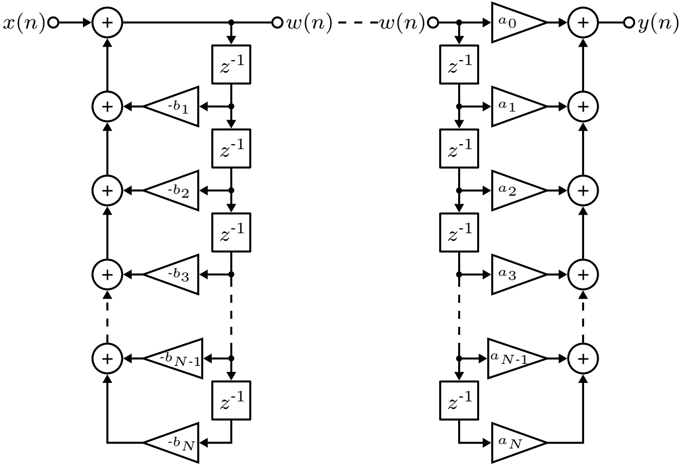
Vi betragter

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

hvor

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}$$



Vi betragter

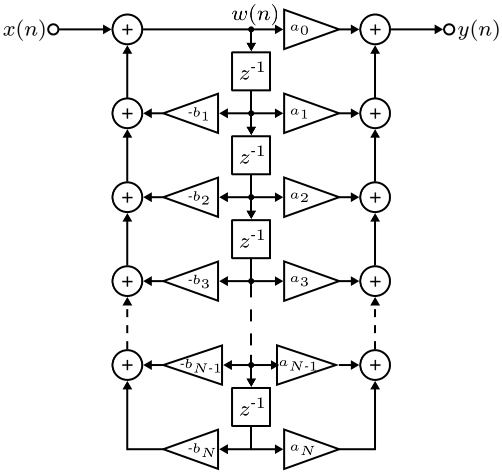
$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

hvor

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

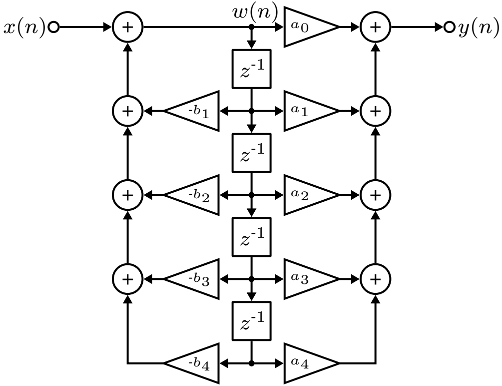
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}$$

Da alle forsinkelsesblokke indeholder værdier $w(n-i)$, så kan strukturen omskrives.



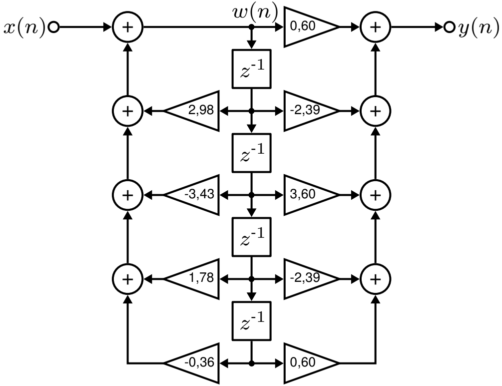
Betragt samme 4. ordens overføringsfunktion som i sidste eksempel

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}$$



Betragt samme 4. ordens overføringsfunktion som i sidste eksempel

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,60 - 2,39z^{-1} + 3,60z^{-2} - 2,39z^{-3} + 0,60z^{-4}}{1 - 2,98z^{-1} + 3,43z^{-2} - 1,78z^{-3} + 0,36z^{-4}}$$



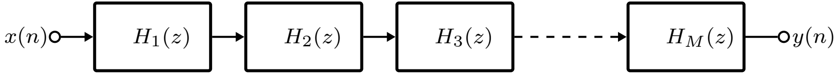
Når et filter skal implementeres, så repræsenteres koefficienterne med et endeligt antal bits, hvilket betyder at de afrundes. Derfor er det vigtigt at mindske filtrets koefficientfølsomhed. Følgende giver stor koefficientfølsomhed

1. **Systemets poler eller nulpunkter er placeret tæt sammen i z-planet**.
   Dette sker fx hvis amplitudekarakteristikken har stejle flanker.
2. **Systemet har poler med lille polargument**.
   Dette sker samplefrekvensen er valgt høj i forhold til systemets afskæringsfrekvens.
3. **Systemet er af høj orden**.
   Dette sker hvis systemet implementeres i een direkte type 1 eller type 2 realisationsstruktur.

Kaskaderealisation
Princip

Et højereordens system implementeres ofte som en kaskadekobling givet som følger

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \cdot \cdots \cdot H_M(z)$$

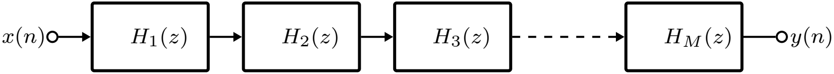


Kaskaderealisation

Princip

Et højereordens system implementeres ofte som en kaskadekobling givet som følger

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \cdot \cdots \cdot H_M(z)$$



De M sektioner af systemet er 1. ordens eller 2. ordens overføringsfunktioner på formen

$$H_k(z) = \frac{a_{0k} + a_{1k}z^{-1}}{1 + b_{1k}z^{-1}}$$

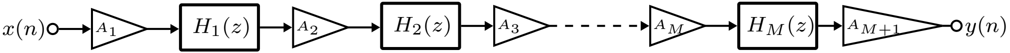
eller

$$H_k(z) = \frac{a_{0k} + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}$$

hvor $k = 1, 2, \ldots, M$ angiver sektionsnummeret.

Kaskaderealisation
Skalering

For at undgå aritmetisk overflow kan skaleringsfaktorer indføres imellem sektionerne.



Betragt følgende 3. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{0,3947 - 1,1841z^{-1} + 1,1841z^{-2} - 0,3947z^{-3}}{1 - 1,289z^{-1} + 0,8070z^{-2} - 0,06173z^{-3}}$$

Filtret skal implementeres som en kaskade at to direkte type 2 strukturer.

Betragt følgende 3. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{0,3947 - 1,1841z^{-1} + 1,1841z^{-2} - 0,3947z^{-3}}{1 - 1,289z^{-1} + 0,8070z^{-2} - 0,06173z^{-3}}$$

Filtret skal implementeres som en kaskade at to direkte type 2 strukturer.

Overføringsfunktionen skrives på standard form som

$$H(z) = 0,3947\frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 - 1,289z^2 + 0,8070z - 0,06173}$$

Betragt følgende 3. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{0,3947 - 1,1841z^{-1} + 1,1841z^{-2} - 0,3947z^{-3}}{1 - 1,289z^{-1} + 0,8070z^{-2} - 0,06173z^{-3}}$$

Filtret skal implementeres som en kaskade at to direkte type 2 strukturer.

Overføringsfunktionen skrives på standard form som

$$H(z) = 0,3947\frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 - 1,289z^2 + 0,8070z - 0,06173}$$

Overføringsfunktionen $H(z)$ har tre nulpunkter: $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ og tre poler: $p_1 = 0,08802$ og $p_2 = p_3^* = 0,6005 + j0,5837$.

Betragt følgende 3. ordens højpasfilter

$$H(z) = \frac{0,3947 - 1,1841z^{-1} + 1,1841z^{-2} - 0,3947z^{-3}}{1 - 1,289z^{-1} + 0,8070z^{-2} - 0,06173z^{-3}}$$

Filtret skal implementeres som en kaskade at to direkte type 2 strukturer.

Overføringsfunktionen skrives på standard form som

$$H(z) = 0,3947\frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 - 1,289z^2 + 0,8070z - 0,06173}$$

Overføringsfunktionen $H(z)$ har tre nulpunkter: $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ og tre poler: $p_1 = 0,08802$ og $p_2 = p_3^* = 0,6005 + j0,5837$.

Systemet $H(z)$ skrives som en kaskade af to overføringsfunktioner $H_1(z)$ og $H_2(z)$.

Overføringsfunktionen kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 H_1(z) H_2(z) = a_0 \frac{z - z_1}{z - p_1} \cdot \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z - p_2)(z - p_3)}$$

Kaskaderealisation
Eksempel (II)

Overføringsfunktionen kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 H_1(z) H_2(z) = a_0 \frac{z - z_1}{z - p_1} \cdot \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z - p_2)(z - p_3)}$$

Ovenstående faktorisering leder til

$$H(z) = 0,3947 \cdot \frac{z - 1}{z - 0,08802} \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

Kaskaderealisation
Eksempel (II)

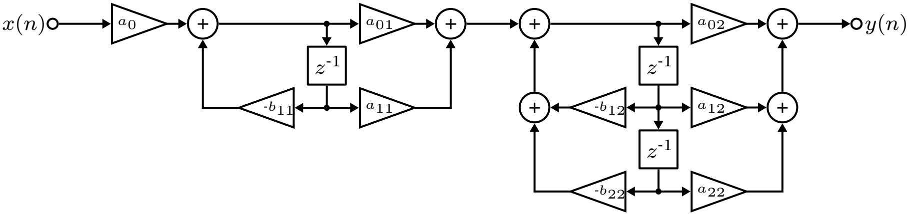
Overføringsfunktionen kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 H_1(z) H_2(z) = a_0 \frac{z - z_1}{z - p_1} \cdot \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z - p_2)(z - p_3)}$$

Ovenstående faktorisering leder til

$$H(z) = 0,3947 \cdot \frac{z - 1}{z - 0,08802} \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

Realisationen af $H(z)$ med en kaskade af to direkte type 2 strukturer er vist herunder.



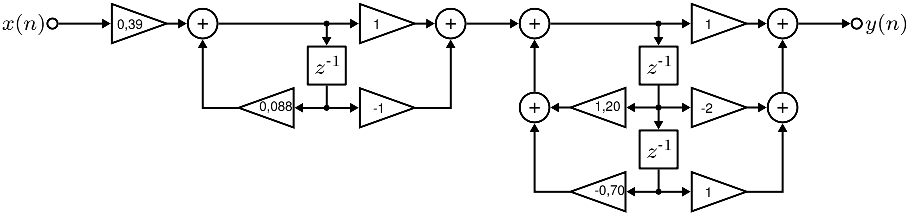
Overføringsfunktionen kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 H_1(z) H_2(z) = a_0 \frac{z - z_1}{z - p_1} \cdot \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z - p_2)(z - p_3)}$$

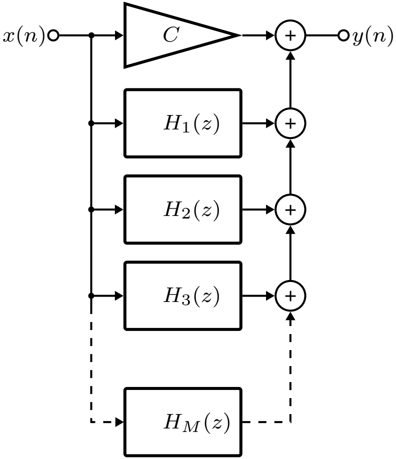
Ovenstående faktorisering leder til

$$H(z) = 0,3947 \cdot \frac{z - 1}{z - 0,08802} \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

Realisationen af $H(z)$ med en kaskade af to direkte type 2 strukturer er vist herunder.



Hvordan kan overføringsfunktionerne $H_1(z), H_2(z), \ldots$ findes?



For at lave en parallelrealisation af filtret

$$H(z) = \frac{0,3947 - 1,1841z^{-1} + 1,1841z^{-2} - 0,3947z^{-3}}{1 - 1,289z^{-1} + 0,8070z^{-2} - 0,06173z^{-3}}$$
$$= \frac{0,3947(z-1)(z^2 - 2z + 1)}{(z - 0,08802)(z^2 - 1,201z + 0,7013)}$$

så partialbrøksopløses den til formen

$$H(z) = C + H_1(z) + H_2(z)$$

For at lave en parallelrealisation af filtret

$$H(z) = \frac{0,3947 - 1,1841z^{-1} + 1,1841z^{-2} - 0,3947z^{-3}}{1 - 1,289z^{-1} + 0,8070z^{-2} - 0,06173z^{-3}}$$
$$= \frac{0,3947(z-1)(z^2 - 2z + 1)}{(z - 0,08802)(z^2 - 1,201z + 0,7013)}$$

så partialbrøksopløses den til formen

$$H(z) = C + H_1(z) + H_2(z)$$

I dette eksempel er

$$H_1(z) = \frac{a_{01}z}{z + b_{11}}$$
$$H_2(z) = \frac{a_{02}z^2 + a_{12}z}{z^2 + b_{12}z + b_{22}}$$

Partialbrøksopløsningen af $H(z)/z$ har formen

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{C}{z} + \frac{a_{01}}{z - 0,08802} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

hvor koefficienterne C og a_{01} kan udregnes som vist i tidligere lektioner.

Partialbrøksopløsningen af $H(z)/z$ har formen

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{C}{z} + \frac{a_{01}}{z - 0,08802} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

hvor koefficienterne C og a_{01} kan udregnes som vist i tidligere lektioner.

Koefficienterne bliver

$$C = z\frac{H(z)}{z}|_{z=0} = 6,394$$
$$a_{01} = (z - 0,08802)\frac{H(z)}{z}|_{z=0,08802} = -5,637$$

Partialbrøksopløsningen af $H(z)/z$ har formen

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{C}{z} + \frac{a_{01}}{z - 0,08802} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

hvor koefficienterne C og a_{01} kan udregnes som vist i tidligere lektioner.

Koefficienterne bliver

$$C = z\frac{H(z)}{z}|_{z=0} = 6,394$$

$$a_{01} = (z - 0,08802)\frac{H(z)}{z}|_{z=0,08802} = -5,637$$

Nu haves

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{6,394}{z} - \frac{5,637}{z - 0,08802} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

For at finde koefficienterne a_{02} og a_{12}, indsættes to værdier for z i ligningen. Her benyttes $z = 1$ of $z = -1$.

For at finde koefficienterne a_{02} og a_{12}, indsættes to værdier for z i ligningen. Her benyttes $z = 1$ of $z = -1$.

For $z = 1$ haves

$$\frac{H(z)}{z}\Big|_{z=1} = \frac{6,394}{z}\Big|_{z=1} - \frac{5,637}{z - 0,08802}\Big|_{z=1} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}\Big|_{z=1}$$

$$0 = 6,394 - \frac{5,637}{1 - 0,08802} + \frac{a_{02} + a_{12}}{1 - 1,201 + 0,7013}$$

For at finde koefficienterne a_{02} og a_{12}, indsættes to værdier for z i ligningen. Her benyttes $z = 1$ of $z = -1$.

For $z = 1$ haves

$$\frac{H(z)}{z}\Big|_{z=1} = \frac{6,394}{z}\Big|_{z=1} - \frac{5,637}{z - 0,08802}\Big|_{z=1} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}\Big|_{z=1}$$

$$0 = 6,394 - \frac{5,637}{1 - 0,08802} + \frac{a_{02} + a_{12}}{1 - 1,201 + 0,7013}$$

Dette medfører at

$$a_{02} + a_{12} = -0,1066$$

Dette medfører at

$$a_{02} + a_{12} = -0,1066$$

For $z = -1$ haves

$$\frac{H(z)}{z}|_{z=-1} = \frac{6,394}{z}|_{z=-1} - \frac{5,637}{z - 0,08802}|_{z=-1} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}|_{z=-1}$$
$$-1 = -6,394 - \frac{5,637}{-1 - 0,08802} + \frac{-a_{02} + a_{12}}{1 + 1,201 + 0,7013}$$

Dette medfører at

$$a_{02} + a_{12} = -0,1066$$

For $z = -1$ haves

$$\frac{H(z)}{z}|_{z=-1} = \frac{6,394}{z}|_{z=-1} - \frac{5,637}{z-0,08802}|_{z=-1} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}|_{z=-1}$$

$$-1 = -6,394 - \frac{5,637}{-1-0,08802} + \frac{-a_{02} + a_{12}}{1 + 1,201 + 0,7013}$$

Dette medfører at

$$-a_{02} + a_{12} = 0,6181$$

Dette medfører at

$$a_{02} + a_{12} = -0,1066$$

For $z = -1$ haves

$$\frac{H(z)}{z}\Big|_{z=-1} = \frac{6,394}{z}\Big|_{z=-1} - \frac{5,637}{z - 0,08802}\Big|_{z=-1} + \frac{a_{02}z + a_{12}}{z^2 - 1,201z + 0,7013}\Big|_{z=-1}$$

$$-1 = -6,394 - \frac{5,637}{-1 - 0,08802} + \frac{-a_{02} + a_{12}}{1 + 1,201 + 0,7013}$$

Dette medfører at

$$-a_{02} + a_{12} = 0,6181$$

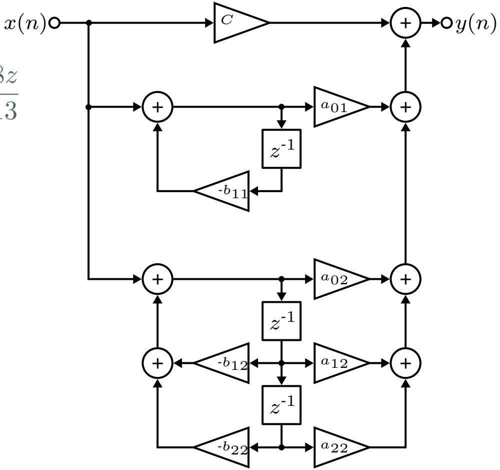
Dermed findes koefficienterne fra

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1066 \\ 0,6181 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3624 \\ 0,2558 \end{bmatrix}$$

Realisationsstrukturen for filtret

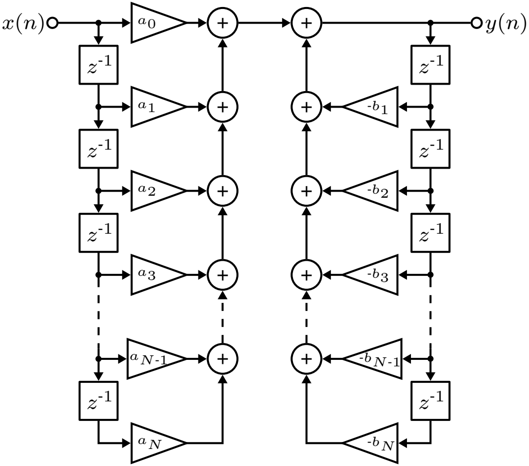
$$H(z) = 6,394 - \frac{5,637z}{z - 0,08802} + \frac{-0,3624z^2 + 0,2558z}{z^2 - 1,201z + 0,7013}$$

bliver dermed følgende.



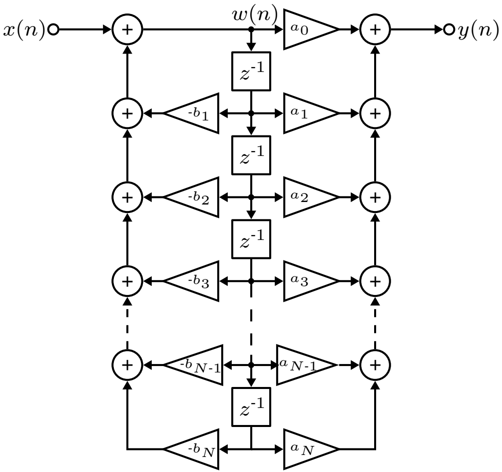
Følgende viser en direkte type 1 realisationsstruktur for differensligningen

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$



Følgende viser en direkte type 2 realisationsstruktur for differensligningen

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

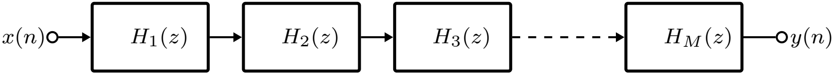


Opsummering
Kaskaderealisation

Et højereordens system kan implementeres som en kaskadekobling af M sektioner givet som følger

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \cdot \cdots \cdot H_M(z)$$

hvor hver sektion er en 1. ordens eller 2. ordens overføringsfunktion.



Et højereordens system kan implementeres som en parallelrealisation af M overføringsfunktioner, der er en 1. ordens eller 2. ordens overføringsfunktion. Disse hverføringsfunktioner findes ved partialbrøksopløsning af $H(z)$.