Lektion 6: Introduktion til IIR filtre

Signalbehandling

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

SDU

Agenda

Introduktion

Design af digitale IIR filtre

Matched z-transformation

Impuls invariant z-transformation

Opsummering

Introduktion

Pensum for Signalbehandling

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 4**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 5**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 6**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 7**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 8**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 10**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 11**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

Digitale filtre opdeles i to kategorier, i henhold til deres impulsrespons

- Infinite Impulse Response filters (IIR-filtre)
  - Har altid poler
- Finite Impulse Response filters (FIR-filtre)
  - Har kun nulpunkter
  - Kan implementeres med lineær fasekarakteristik

Digitale filtre opdeles i to kategorier, i henhold til deres impulsrespons

- Infinite Impulse Response filters (IIR-filtre)
  - Har altid poler
- Finite Impulse Response filters (FIR-filtre)
  - Har kun nulpunkter
  - Kan implementeres med lineær fasekarakteristik

Foreskelle imellem FIR filtre og IIR filtre

- Et FIR filter har 5 til 10 gange større realisationsstruktur end et tilsvarende IIR filter.
- Et FIR filter er altid stabilt, da det kun har nulpunkter.
- Et FIR filter kaldes en ikke-rekursiv struktur, mens et IIR filter kaldes en rekursiv struktur.
- Et FIR filter er mindre sensitivt overfor koefficientændringer og afrundingsfejl end et IIR filter.

Digitale IIR-filtre kan designes ved transformation af prototype-filtre i s-domæne ved brug af følgende metoder

- Matched z-transformation
- Impuls invariant z-transformation
- Bilineær z-transformation

Et IIR-filter designes ved at følge proceduren

1. Filtrets specifikationer opstilles
2. Filtrets z-domæne overføringsfunktion opstilles
3. Der vælges optimal realisationsstruktur
4. Der fremstilles program til signalprocessor eller tegnes diagram for hardwareløsning

Design af digitale IIR filtre

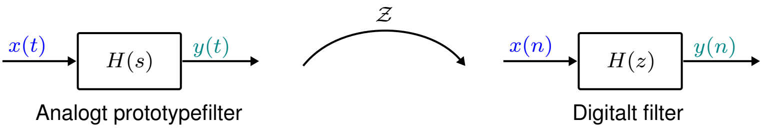
Transformation af analogt prototype filter (I)

Fremgangsmetoden for design af IIR-filtre er z-transformation af et analogt prototype filter, dvs. vi transformerer

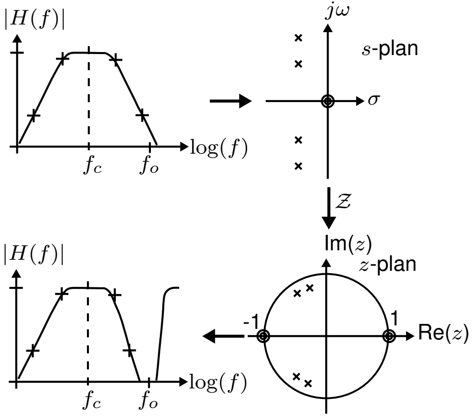
$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} A_i s^i}{\sum_{i=0}^{N} B_i s^i}$$

til

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} b_i s^{-i}}$$



Transformationen fra s-domæne til z-domæne flytter polerne i s-planen til poler i z-planen, der giver et lignende Bode plot og filterrespons.



Matched z-transformation

Ved matched z-transformation overføres prototypefiltrets poler og nulpunkter direkte til z-domæne ved brug af formlen

$$z = e^{sT}$$

Ved matched z-transformation overføres prototypefiltrets poler og nulpunkter direkte til z-domæne ved brug af formlen

$$z = e^{sT}$$

Husk at vi tidligere har anvendt denne relation til at relatere z-planen med s-planen.

Matched z-transformation

Første ordens system (I)

En første ordens overføringsfunktion med et nulpunkt er givet ved

$$H(s) = \frac{s + A_0}{s + B_0} = \frac{s - \sigma_1}{s - \sigma_2}$$

hvor $\sigma_1 = -A_0$ er et reelt nulpunkt og $\sigma_2 = -B_0$ er en reelt pol.

Matched z-transformation
Første ordens system (I)

En første ordens overføringsfunktion med et nulpunkt er givet ved

$$H(s) = \frac{s + A_0}{s + B_0} = \frac{s - \sigma_1}{s - \sigma_2}$$

hvor $\sigma_1 = -A_0$ er et reelt nulpunkt og $\sigma_2 = -B_0$ er en reelt pol.

Ved brug af matched z-transformation kan nulpunktet og polen udregnes som

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{\sigma_1 T} \qquad \text{og} \qquad z_2 = e^{s_2 T} = e^{\sigma_2 T}$$

Matched z-transformation

Første ordens system (I)

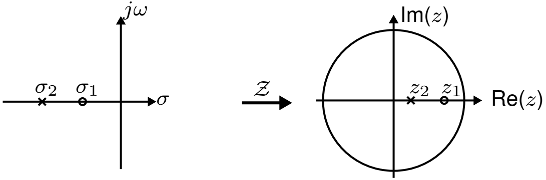
En første ordens overføringsfunktion med et nulpunkt er givet ved

$$H(s) = \frac{s + A_0}{s + B_0} = \frac{s - \sigma_1}{s - \sigma_2}$$

hvor $\sigma_1 = -A_0$ er et reelt nulpunkt og $\sigma_2 = -B_0$ er en reelt pol.

Ved brug af matched z-transformation kan nulpunktet og polen udregnes som

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{\sigma_1 T} \qquad \text{og} \qquad z_2 = e^{s_2 T} = e^{\sigma_2 T}$$



Et digitalt første ordens filter givet fra matched z-transformation har formen

$$H(z) = \frac{z - e^{\sigma_1 T}}{z - e^{\sigma_2 T}}$$

eller

$$H(z) = \frac{1 - e^{\sigma_1 T} z^{-1}}{1 - e^{\sigma_2 T} z^{-1}}$$

Matched z-transformation
Første ordens system (III)

Betragt et første ordens system uden nulpunkt

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a}$$

Matched z-transformation

Første ordens system (III)

Betragt et første ordens system uden nulpunkt

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a}$$

Hvis førnævnte procedure benyttes, så fåes overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{\sigma_1 T} z^{-1}}$$

hvor σ_1 er polen for $H(s)$ og T er sampleintervallet [s].

Betragt et første ordens system uden nulpunkt

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a}$$

Hvis førnævnte procedure benyttes, så fåes overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{\sigma_1 T} z^{-1}}$$

hvor σ_1 er polen for $H(s)$ og T er sampleintervallet [s].
Overføringsfunktionen $H(z)$ har ikke DC-forstærkning på 1 ligesom $H(s)$. Derfor indføres forstærkningen a_0, dvs.

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}$$

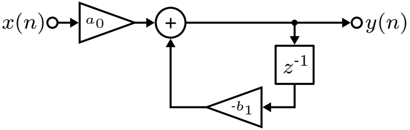
hvor

$$b_1 = -e^{\sigma_1 T} \qquad \text{og} \qquad a_0 = 1 + b_1$$

Matched z-transformation

Første ordens system (IV)

En digital realisationsstruktur for første ordens systemet er vist her.



Betragt følgende analoge 1. ordens lavpasfilter med afskæringsfrekvens $\omega_a = 2\pi f_a$ hvor $f_a = 300$ Hz

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a} = \frac{1885}{s + 1885}$$

som har pol i $s_1 = \sigma_1 = -1885$.

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Betragt følgende analoge 1. ordens lavpasfilter med afskæringsfrekvens $\omega_a = 2\pi f_a$ hvor $f_a = 300$ Hz

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a} = \frac{1885}{s + 1885}$$

som har pol i $s_1 = \sigma_1 = -1885$.

Vi ønsker at bestemme et digitalt filter ved matched z-transformation med samplingsfrekvens på 16 kHz.

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Betragt følgende analoge 1. ordens lavpasfilter med afskæringsfrekvens $\omega_a = 2\pi f_a$ hvor $f_a = 300$ Hz

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a} = \frac{1885}{s + 1885}$$

som har pol i $s_1 = \sigma_1 = -1885$.

Vi ønsker at bestemme et digitalt filter ved matched z-transformation med samplingsfrekvens på 16 kHz.
Koefficienterne for det digitale filter bliver

$$b_1 = -e^{\sigma_1 T} = -0,8889$$
$$a_0 = 1 + b_1 = 0,1111$$

Matched z-transformation

Eksempel (I)

Betragt følgende analoge 1. ordens lavpasfilter med afskæringsfrekvens $\omega_a = 2\pi f_a$ hvor $f_a = 300$ Hz

$$H(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a} = \frac{1885}{s + 1885}$$

som har pol i $s_1 = \sigma_1 = -1885$.

Vi ønsker at bestemme et digitalt filter ved matched z-transformation med samplingsfrekvens på 16 kHz.
Koefficienterne for det digitale filter bliver

$$b_1 = -e^{\sigma_1 T} = -0,8889$$
$$a_0 = 1 + b_1 = 0,1111$$

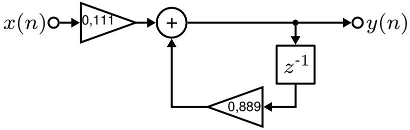
Det digitale lavpasfilters overføringsfunktion er

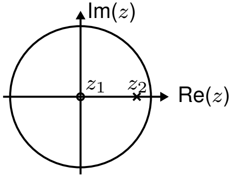
$$H(z) = \frac{0,1111}{1 - 0,8889z^{-1}}$$

Matched z-transformation

Eksempel (II)

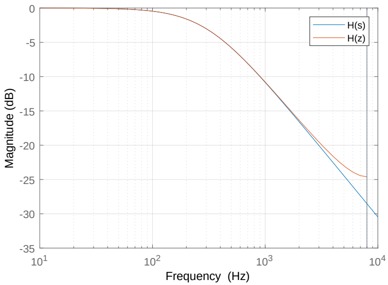
Det digitale filter $H(z)$ har nulpunkt i $z = 0$ og pol i $z = 0,8889$ og direkte type 2 realisationsstruktur som vist herunder.



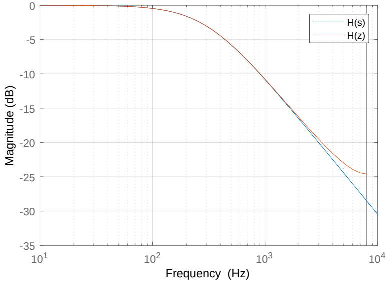


Matched z-transformation
Eksempel (III)

Ved sammenligning af amplitudekarakteristikkerne for de to filtre ses det at de afviger ved høje frekvenser (tæt på foldningsfrekvensen f_o).



Ved sammenligning af amplitudekarakteristikkerne for de to filtre ses det at de afviger ved høje frekvenser (tæt på foldningsfrekvensen f_o).



Grundet forskellen mellem filtrene kan denne transformation kun benyttes når $f_a << f_o$.

For et andet ordens system med komplekst konjugeret pol- og nulpunktspar kan overføringsfunktionen skrives

$$H(s) = \frac{s^2 + A_1 s + A_0}{s^2 + B_1 s + B_0}$$

som har nulpunkter i $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_1^* = \sigma_1 - j\omega_1$ og poler i $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2, s_2^* = \sigma_2 - j\omega_2$.

Matched z-transformation
Anden ordens system (I)

For et andet ordens system med komplekst konjugeret pol- og nulpunktspar kan overføringsfunktionen skrives

$$H(s) = \frac{s^2 + A_1 s + A_0}{s^2 + B_1 s + B_0}$$

som har nulpunkter i $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_1^* = \sigma_1 - j\omega_1$ og poler i $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2, s_2^* = \sigma_2 - j\omega_2$.

Ved matched z-transformation fås

$$H(z) = \frac{(z - e^{\sigma_1 T} e^{j\omega_1 T})(z - e^{\sigma_1 T} e^{-j\omega_1 T})}{(z - e^{\sigma_2 T} e^{j\omega_2 T})(z - e^{\sigma_2 T} e^{-j\omega_2 T})}$$

Matched z-transformation
Anden ordens system (I)

For et andet ordens system med komplekst konjugeret pol- og nulpunktspar kan overføringsfunktionen skrives

$$H(s) = \frac{s^2 + A_1 s + A_0}{s^2 + B_1 s + B_0}$$

som har nulpunkter i $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_1^* = \sigma_1 - j\omega_1$ og poler i $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2, s_2^* = \sigma_2 - j\omega_2$.

Ved matched z-transformation fås

$$H(z) = \frac{(z - e^{\sigma_1 T} e^{j\omega_1 T})(z - e^{\sigma_1 T} e^{-j\omega_1 T})}{(z - e^{\sigma_2 T} e^{j\omega_2 T})(z - e^{\sigma_2 T} e^{-j\omega_2 T})}$$

Ved brug af Eulers identitet fås ($\cos(x) = (e^{jx} + e^{-jx})/2$)

$$H(z) = \frac{z^2 - (2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T))z + e^{2\sigma_1 T}}{z^2 - (2e^{\sigma_2 T}\cos(\omega_2 T))z + e^{2\sigma_2 T}} = \frac{1 - (2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T))z^{-1} + e^{2\sigma_1 T} z^{-2}}{1 - (2e^{\sigma_2 T}\cos(\omega_2 T))z^{-1} + e^{2\sigma_2 T} z^{-2}}$$

Et andet ordens lavpasfilter er givet som

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Et andet ordens lavpasfilter er givet som

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Fra tidligere omskrivning haves

$$b_1 = -2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T) \qquad \text{og} \qquad b_2 = e^{2\sigma_i T}$$

Matched z-transformation

Anden ordens system (II)

Et andet ordens lavpasfilter er givet som

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

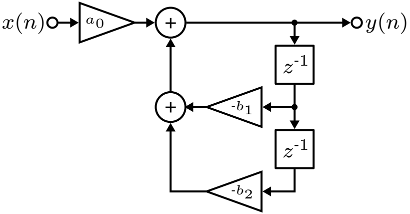
Fra tidligere omskrivning haves

$$b_1 = -2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T) \qquad \text{og} \qquad b_2 = e^{2\sigma_i T}$$

Hvis DC forstærkningen for lavpasfiltret skal være 0 dB så gælder det at

$$a_0 = 1 + b_1 + b_2$$

Realisationsstrukturen for lavpasfiltret er givet som vist herunder.



Matched z-transformation
Design procedure

Følgende procedure benyttes til design af digitale filtre ved brug af matched z-transformation

1. Bestem det analoge prototypefilters frekvensnormerede og faktoriserede overføringsfunktion $H(s)$.
2. Bestem de analoge frekvensnormerede poler og nulpunkter.
3. Bestem de denormerede poler og nulpunkter.
4. Bestem den digitale overføringsfunktions koefficienter.
5. Implementer overføringsfunktionen som en kaskadestruktur.

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Design et digitalt 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz ved brug af Matched z-transformation med samplefrekvens på 8 kHz.
En frekvensnormeret overføringsfunktionen for et 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz er givet som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

og har poler i $s = -0,7071 \pm j0,7071$.

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Design et digitalt 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz ved brug af Matched z-transformation med samplefrekvens på 8 kHz.
En frekvensnormeret overføringsfunktionen for et 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz er givet som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

og har poler i $s = -0,7071 \pm j0,7071$.

De denormerede poler fås ved multiplikation med afskæringsfrekvensen ω_a, dvs.

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 = -3554 + j3554$$

Design et digitalt 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz ved brug af Matched z-transformation med samplefrekvens på 8 kHz.
En frekvensnormeret overføringsfunktionen for et 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz er givet som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

og har poler i $s = -0,7071 \pm j0,7071$.

De denormerede poler fås ved multiplikation med afskæringsfrekvensen ω_a, dvs.

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 = -3554 + j3554$$

Filterkoefficienterne kan nu udregnes ved brug af formlerne

$$b_1 = 2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T)$$

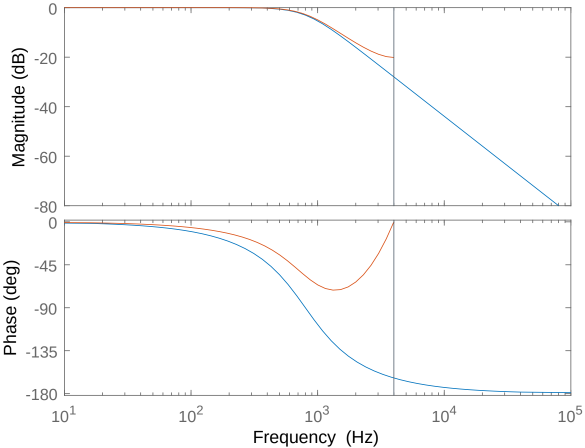
$$b_2 = e^{2\sigma_1 T}$$

$$a_0 = 1 + b_1 + b_2$$

Matched z-transformation

Eksempel (II)

Det ses at det digitale filter er en kraftigt aliaseret version af det oprindelige analoge filter.



Matched z-transformation
Digital 2. ordens resonator (I)

Vi betragter 2. ordens overføringsfunktioner med komplekse poler, der er stærkt underdæmpet ($\zeta < 0.1$ eller $Q > 5$). Sådanne systemer har en forstærkningspeak

$$|H(\omega_p)| \approx 20 \log Q$$

ved peak frekvensen ω_p, hvor det gælder at $\omega_p \approx \omega_n$.

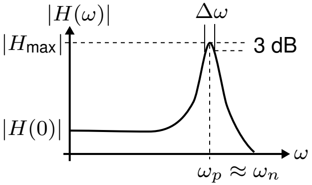
Matched z-transformation

Digital 2. ordens resonator (I)

Vi betragter 2. ordens overføringsfunktioner med komplekse poler, der er stærkt underdæmpet ($\zeta < 0.1$ eller $Q > 5$). Sådanne systemer har en forstærkningspeak

$$|H(\omega_p)| \approx 20 \log Q$$

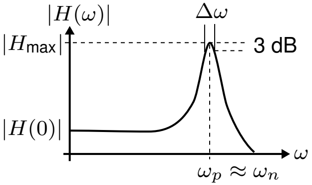
ved peak frekvensen ω_p, hvor det gælder at $\omega_p \approx \omega_n$.



Vi betragter 2. ordens overføringsfunktioner med komplekse poler, der er stærkt underdæmpet ($\zeta < 0.1$ eller $Q > 5$). Sådanne systemer har en forstærkningspeak

$$|H(\omega_p)| \approx 20 \log Q$$

ved peak frekvensen ω_p, hvor det gælder at $\omega_p \approx \omega_n$.



Dette filter kaldes en 2. ordens resonator, og er en simpel måde at realisere et båndpasfilter på.

Matched z-transformation

Digital 2. ordens resonator (II)

Filtrets -3 dB båndbredde $\Delta\omega$ kan for $\zeta < 0.1$ udregnes som følger.
Filtrets Q-værdi er

$$Q \approx \frac{\omega_n}{\Delta\omega}$$

Filtrets -3 dB båndbredde $\Delta\omega$ kan for $\zeta < 0.1$ udregnes som følger.
Filtrets Q-værdi er

$$Q \approx \frac{\omega_n}{\Delta\omega}$$

Dette giver en overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{Q}\omega_n s + \omega_n^2}$$

Matched z-transformation
Digital 2. ordens resonator (II)

Filtrets -3 dB båndbredde $\Delta\omega$ kan for $\zeta < 0.1$ udregnes som følger. Filtrets Q-værdi er

$$Q \approx \frac{\omega_n}{\Delta\omega}$$

Dette giver en overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{Q}\omega_n s + \omega_n^2}$$

Et tilsvarende digitalt filter er givet som

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Matched z-transformation
Digital 2. ordens resonator (III)

Når følgende digitale filters koefficienter skal findes kan udtryk for resonansforstærkning og minimale forstærkning benyttes.

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Resonansforstærkningen ved ω_p er i dB

$$|H_{\mathsf{max}}| = 20 \log \frac{a_0}{(1 - b_2)\sqrt{1 - (b_1^2/4b_2)}}$$

Resonatorens minimale stopbåndsdæmpning

$$|H(0)| = 20 \log \frac{a_0}{1 + b_1 + b_2}$$

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Design et digitalt båndpasfilter med resonansfrekvens $f_c = 500$ Hz og -3 dB båndbredde $\Delta f = 20$ Hz. Filtrets samplefrekvens skal være 8 kHz.

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Design et digitalt båndpasfilter med resonansfrekvens $f_c = 500$ Hz og -3 dB båndbredde $\Delta f = 20$ Hz. Filtrets samplefrekvens skal være 8 kHz.
For at finde et analogt filter skal Q-værdien findes

$$Q = \frac{f_c}{\Delta f} = 25$$

Matched z-transformation

Eksempel (I)

Design et digitalt båndpasfilter med resonansfrekvens $f_c = 500$ Hz og -3 dB båndbredde $\Delta f = 20$ Hz. Filtrets samplefrekvens skal være 8 kHz.
For at finde et analogt filter skal Q-værdien findes

$$Q = \frac{f_c}{\Delta f} = 25$$

Nu kan et frekvensnormeret filter findes som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{Q}s + 1} = \frac{1}{s^2 + 0,04s + 1}$$

med poler $s_1 = -0,02 + j0,9998$ og $s_1^* = -0,02 - j0,9998$.

Matched z-transformation
Eksempel (I)

Design et digitalt båndpasfilter med resonansfrekvens $f_c = 500$ Hz og -3 dB båndbredde $\Delta f = 20$ Hz. Filtrets samplefrekvens skal være 8 kHz.
For at finde et analogt filter skal Q-værdien findes

$$Q = \frac{f_c}{\Delta f} = 25$$

Nu kan et frekvensnormeret filter findes som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{Q}s + 1} = \frac{1}{s^2 + 0,04s + 1}$$

med poler $s_1 = -0,02 + j0,9998$ og $s_1^* = -0,02 - j0,9998$.
De denormerede poler findes ved multiplikation med centerfrekvensen, dvs.

$$\sigma_1 \pm j\omega_1 = -62,83 \pm j3141$$

Matched z-transformation
Eksempel (II)

Filterkoefficienterne udregnes ved brug af ligningerne

$$b_1 = 2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T) \qquad \text{og} \qquad b_2 = e^{2\sigma_i T}$$

og ved at vælge $|H_{\text{max}}| = 0$ dB fås en forstærkning i pasbåndet på 0 dB. Dette opnås ved at a_0-koefficienten er

$$a_0 = (1 - b_2)\sqrt{1 - (b_1^2/4b_2)}$$

Matched z-transformation
Eksempel (II)

Filterkoefficienterne udregnes ved brug af ligningerne

$$b_1 = 2e^{\sigma_1 T}\cos(\omega_1 T) \qquad \text{og} \qquad b_2 = e^{2\sigma_i T}$$

og ved at vælge $|H_{\text{max}}| = 0$ dB fås en forstærkning i pasbåndet på 0 dB. Dette opnås ved at a_0-koefficienten er

$$a_0 = (1 - b_2)\sqrt{1 - (b_1^2/4b_2)}$$

Dette giver overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{5,975 \cdot 10^{-3}}{1 - 1,833z^{-1} + 0,9944z^{-2}}$$

Kategorien af z-transformationer kaldet input *invariant z-transformation* karakteriseres ved at lade responset til en bestemt type indgangssignal (step, impuls, rampe) være invariant under z-transformation.

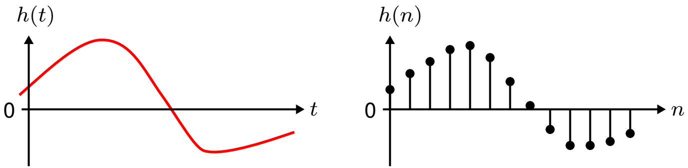
Vi kigger på impuls invariant z-transformation, dvs.

$$h(n) = h(nT) = h(t)|_{t=nT}$$

Kategorien af z-transformationer kaldet input *invariant z-transformation* karakteriseres ved at lade responset til en bestemt type indgangssignal (step, impuls, rampe) være invariant under z-transformation.

Vi kigger på impuls invariant z-transformation, dvs.

$$h(n) = h(nT) = h(t)|_{t=nT}$$



Impuls invariant z-transformation

Fremgangsmetode (I)

For at finde en impulsinvariant z-transformation, så z-transformeres impulsresponset

$$H(z) = T \cdot \mathcal{Z}[h(n)]$$

For at finde en impulsinvariant z-transformation, så z-transformeres impulsresponset

$$H(z) = T \cdot \mathcal{Z}[h(n)]$$

Givet et Nte ordens filter

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} A_i s^i}{\sum_{i=0}^{N} B_i s^i} \qquad M \leq N$$

der ved partialbrøksopløsning er

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - s_i}$$

hvor s_i er det analoge filters pol nummer i.

Overføringsfunktionen

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - s_i}$$

kan nu invers Laplace transformeres

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{s_i t}$$

Impuls invariant z-transformation

Fremgangsmetode (II)

Overføringsfunktionen

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - s_i}$$

kan nu invers Laplace transformeres

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{s_i t}$$

Det digitalefilters impulsrespons er dermed givet som

$$h(n) = h(nT) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{s_i n T}$$

Overføringsfunktionen

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - s_i}$$

kan nu invers Laplace transformeres

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{s_i t}$$

Det digitalefilters impulsrespons er dermed givet som

$$h(n) = h(nT) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{s_i nT}$$

Ved z-transformation af $h(n)$ fås

$$H(z) = T \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{z}{z - e^{s_i T}} = T \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

Impuls invariant z-transformation
1. ordens systemer

Når koefficienterne skal udregnes for et 1. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{A_0}{s + B_0} = \frac{-\sigma_0}{s - \sigma_0}$$

kan førnævnte z-transformation anvendes

$$H(z) = T \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{z}{z - e^{s_i T}} = T \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

Impuls invariant z-transformation
1. ordens systemer

Når koefficienterne skal udregnes for et 1. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{A_0}{s + B_0} = \frac{-\sigma_0}{s - \sigma_0}$$

kan førnævnte z-transformation anvendes

$$H(z) = T\sum_{i=1}^{N} k_i \frac{z}{z - e^{s_i T}} = T\sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

Dermed fås

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}$$

hvor

$$a_0 = -\sigma_i T \qquad \text{og} \qquad b_1 = -e^{\sigma_i T}$$

Når koefficienterne skal udregnes for et 2. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{A_0}{s^2 + B_1 s + B_0}$$

så skal $H(s)$ partialbrøkopløses som

$$H(s) = \frac{k_i}{s - s_i} + \frac{k_i^*}{s - s_i^*}$$

hvor $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ og s_i^* er systemets poler og koefficienten er $k_i = \alpha_i + j\beta_i$.

Når koefficienterne skal udregnes for et 2. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{A_0}{s^2 + B_1 s + B_0}$$

så skal $H(s)$ partialbrøkopløses som

$$H(s) = \frac{k_i}{s - s_i} + \frac{k_i^*}{s - s_i^*}$$

hvor $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ og s_i^* er systemets poler og koefficienten er $k_i = \alpha_i + j\beta_i$.
Ved z-transformation fås

$$H(z) = T\left(\frac{k_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} + \frac{k_i^*}{1 - e^{s_i^* T} z^{-1}}\right)$$

Når koefficienterne skal udregnes for et 2. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{A_0}{s^2 + B_1 s + B_0}$$

så skal $H(s)$ partialbrøkopløses som

$$H(s) = \frac{k_i}{s - s_i} + \frac{k_i^*}{s - s_i^*}$$

hvor $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ og s_i^* er systemets poler og koefficienten er $k_i = \alpha_i + j\beta_i$.
Ved z-transformation fås

$$H(z) = T\left(\frac{k_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} + \frac{k_i^*}{1 - e^{s_i^* T} z^{-1}}\right)$$

Ovenstående kan omskrives til

$$H(z) = T\frac{2\alpha_i - 2e^{\sigma_i T}(\alpha_i \cos(\omega_i T) - \beta_i \sin(\omega_i T))z^{-1}}{1 - (2e^{\sigma_i T}\cos(\omega_i T))z^{-1} + e^{2\sigma_i T} z^{-2}}$$

Slutteligt kan

$$H(z) = T\frac{2\alpha_i - 2e^{\sigma_i T}(\alpha_i \cos(\omega_i T) - \beta_i \sin(\omega_i T))z^{-1}}{1 - (2e^{\sigma_i T}\cos(\omega_i T))z^{-1} + e^{2\sigma_i T}z^{-2}}$$

skrives som

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

hvor

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\alpha_i \\
a_1 &= -2e^{\sigma_i T}(\alpha_i \cos(\omega_i T) - \beta_i \sin(\omega_i T)) \\
b_1 &= -(2e^{\sigma_i T}\cos(\omega_i T)) \\
b_2 &= e^{2\sigma_i T}
\end{aligned}$$

Impuls invariant z-transformation
Design procedure

Følgende procedure benyttes til design af digitale filtre ved brug af impuls invariant z-transformation

1. Bestem det analoge prototypefilters frekvensnormerede overføringsfunktion $H(s)$.
2. Partialbrøksopløs $H(s)$ til 1. og 2. ordens overføringsfunktioner (maksimalt antal 2. ordens overføringsfunktioner).
3. Denormer koefficienterne k_i og polerne $\sigma_i + j\omega_i$ ved multiplikation med afskæringsfrekvensen eller centerfrekvensen.
4. Bestem den digitale overføringsfunktions koefficienter.
5. Implementer overføringsfunktionen som en parallelstruktur.

En frekvensnormeret overføringsfunktionen for et 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz er givet som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

og har poler i $s = -0,7071 \pm j0,7071$.

En frekvensnormeret overføringsfunktionen for et 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz er givet som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

og har poler i $s = -0,7071 \pm j0,7071$.

Ved partialbrøkopløsning kan $H(s)$ skrives

$$H(s) = \frac{k_1}{s + 0,7071 - j0,7071} + \frac{k_1^*}{s + 0,7071 + j0,7071}$$

Impuls invariant z-transformation
Eksempel (I)

En frekvensnormeret overføringsfunktionen for et 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 800$ Hz er givet som

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

og har poler i $s = -0,7071 \pm j0,7071$.

Ved partialbrøkopløsning kan $H(s)$ skrives

$$H(s) = \frac{k_1}{s + 0,7071 - j0,7071} + \frac{k_1^*}{s + 0,7071 + j0,7071}$$

De normerede koefficienter findes til

$$k_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = -j0,7071 \qquad \text{og} \qquad k_1^* = \alpha_1 - j\beta_1 = j0,7071$$

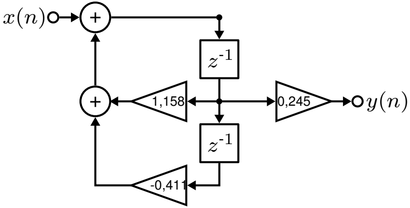
De denormerede koefficienter og poler findes ved multiplikation med afskæringsfrekvensen

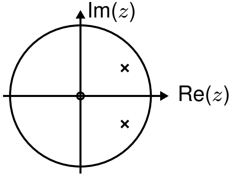
$$\sigma_1 = -0,7071 \cdot 2\pi \cdot 800 = -3554$$
$$\omega_1 = -0,7071 \cdot 2\pi \cdot 800 = 3554$$
$$\alpha_1 = 0$$
$$\beta_1 = -0,7071 \cdot 2\pi \cdot 800 = -3554$$

De denormerede koefficienter og poler findes ved multiplikation med afskæringsfrekvensen

$$\sigma_1 = -0,7071 \cdot 2\pi \cdot 800 = -3554$$
$$\omega_1 = -0,7071 \cdot 2\pi \cdot 800 = 3554$$
$$\alpha_1 = 0$$
$$\beta_1 = -0,7071 \cdot 2\pi \cdot 800 = -3554$$

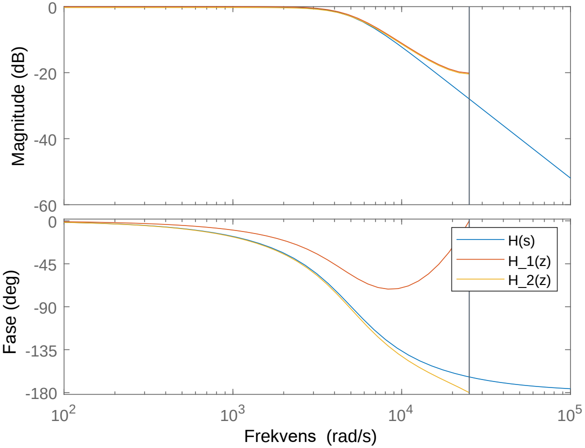
Ovenstående koefficienter leder til følgende realisationsstruktur og polnulpunktsdiagram når samplefrekvensen er 8 kHz.





Impuls invariant z-transformation

Eksempel (III)



Opsummering

Filter design

Et IIR-filter designes ved at følge proceduren

1. Filtrets specifikationer opstilles
2. Filtrets z-domæne overføringsfunktion opstilles ved brug af
   - Matched z-transformation
   - Impuls invariant z-transformation
   - Bilineær z-transformation
3. Der vælges optimal realisationsstruktur
4. Der fremstilles program til signalprocessor eller tegnes diagram for hardwareløsning

Opsummering

Design procedure ved matched z-transformation

Følgende procedure benyttes til design af digitale IIR filtre ved brug af matched z-transformation

1. Bestem det analoge prototypefilters frekvensnormerede og faktoriserede overføringsfunktion $H(s)$.
2. Bestem de analoge frekvensnormerede poler og nulpunkter.
3. Bestem de denormerede poler og nulpunkter.
4. Bestem den digitale overføringsfunktions koefficienter.
5. Implementer overføringsfunktionen som en kaskadestruktur.

Opsummering

Design procedure ved impuls invariant z-transformation

Følgende procedure benyttes til design af digitale IIR filtre ved brug af impuls invariant z-transformation

1. Bestem det analoge prototypefilters frekvensnormerede overføringsfunktion $H(s)$.
2. Partialbrøksopløs $H(s)$ til 1. og 2. ordens overføringsfunktioner (maksimalt antal 2. ordens overføringsfunktioner).
3. Denormer koefficienterne k_i og polerne $\sigma_i + j\omega_i$ ved multiplikation med afskæringsfrekvensen eller centerfrekvensen.
4. Bestem den digitale overføringsfunktions koefficienter.
5. Implementer overføringsfunktionen som en parallelstruktur.