Lektion 9: Design af IIR filtre

Signalbehandling

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

SDU

Agenda

Introduktion

Bilineær z-transformation
- Definition
- Warping og prewarping
- Koefficienter af 1. ordens systemer
- Koefficienter af 2. ordens systemer
- Eksempel

Opsummering

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

Digitale filtre opdeles i to kategorier, i henhold til deres impulsrespons

- Infinite Impulse Response filters (IIR-filtre)
  - Har altid poler
- Finite Impulse Response filters (FIR-filtre)
  - Har kun nulpunkter
  - Kan implementeres med lineær fasekarakteristik

Et IIR-filter designes ved at følge proceduren

1. Filtrets specifikationer opstilles
2. Filtrets z-domæne overføringsfunktion opstilles ved brug af
   - Matched z-transformation
   - Impuls invariant z-transformation
   - Bilineær z-transformation
3. Der vælges optimal realisationsstruktur
4. Der fremstilles program til signalprocessor eller tegnes diagram for hardwareløsning

Formålet med bilineær z-transformation er at *eliminere aliaseringsfejlen* som opstår ved både matched z-transformation og impuls invariant z-transformation.

Formålet med bilineær z-transformation er at *eliminere aliaseringsfejlen* som opstår ved både matched z-transformation og impuls invariant z-transformation.

Ved bilineær z-transformation substitueres s i $H(s)$ med en funktion af z ($s = f(z)$) dvs.

$$H(z) = H(s)|_{s=f(z)}$$

Formålet med bilineær z-transformation er at *eliminere aliaseringsfejlen* som opstår ved både matched z-transformation og impuls invariant z-transformation.

Ved bilineær z-transformation substitueres s i $H(s)$ med en funktion af z ($s = f(z)$) dvs.

$$H(z) = H(s)|_{s=f(z)}$$

Relationen mellem s og z er $z = e^{sT}$, hvilket medfører at

$$s = \frac{1}{T}\ln(z)$$

Formålet med bilineær z-transformation er at *eliminere aliaseringsfejlen* som opstår ved både matched z-transformation og impuls invariant z-transformation.

Ved bilineær z-transformation substitueres s i $H(s)$ med en funktion af z ($s = f(z)$) dvs.

$$H(z) = H(s)|_{s=f(z)}$$

Relationen mellem s og z er $z = e^{sT}$, hvilket medfører at

$$s = \frac{1}{T}\ln(z)$$

Det ønskes at indsætte denne relation i stedet for s i overføringsfunktionen, men dette leder ikke til en rationel funktion i z. Derfor approksimeres $\ln(z)$.

Den naturlige logaritme er defineret som en undelig sum

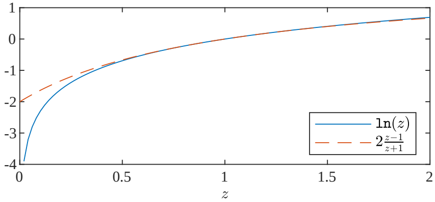
$$\ln z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right]$$

Den naturlige logaritme er defineret som en undelig sum

$$\ln z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right]$$

Indsættelse af deffinitionen direkte i overføringsfunktionen vil give en overføringsfunktion med uendelig orden. Derfor approksimeres logaritmen som

$$\ln z \approx 2\frac{z-1}{z+1}$$



En diskret overføringsfunktion fås dermed ved bilineær z-transformation som

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

En diskret overføringsfunktion fås dermed ved bilineær z-transformation som

$$H(z) = H(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Betragtes en første ordens overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

fås

$$H(z) = \frac{1}{\tau \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1 + z^{-1}}{\frac{2\tau}{T} + 1 + (1 - \frac{2\tau}{T})z^{-1}}$$

Relationen

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

kan omskrives til

$$z = \frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

Relationen

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

kan omskrives til

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$

Lad $s = \sigma + j\Omega$ så gælder det at

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right)^2 + \Omega^2}}$$

Relationen

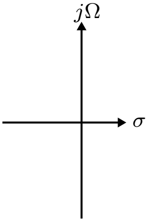
$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

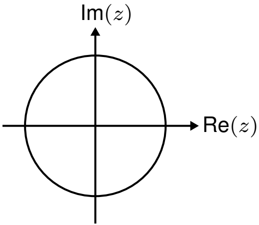
kan omskrives til

$$z = \frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

Lad $s = \sigma + j\Omega$ så gælder det at

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T}+\sigma\right)^2+\Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T}-\sigma\right)^2+\Omega^2}}$$





Relationen

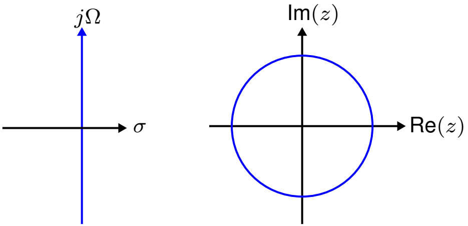
$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

kan omskrives til

$$z = \frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

Lad $s = \sigma + j\Omega$ så gælder det at

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T}+\sigma\right)^2+\Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T}-\sigma\right)^2+\Omega^2}}$$



Imaginæraksen for s-planen ($\sigma = 0$) mappes til enhedscirklen $|z| = 1$.

Bilineær z-transformation

Relation mellem s- og z-plan (amplitude)

Relationen

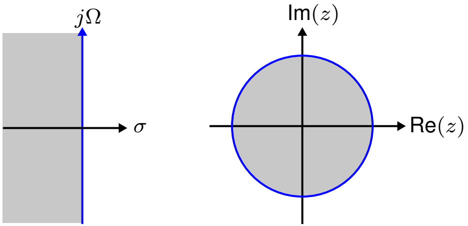
$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

kan omskrives til

$$z = \frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

Lad $s = \sigma + j\Omega$ så gælder det at

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T}+\sigma\right)^2+\Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T}-\sigma\right)^2+\Omega^2}}$$



Imaginæraksen for s-planen ($\sigma = 0$) mappes til enhedscirklen $|z| = 1$.
Venstre halvplan af s-planen ($\sigma < 0$) mappes til det indre af enhedscirklen $|z| < 1$.

Relationen

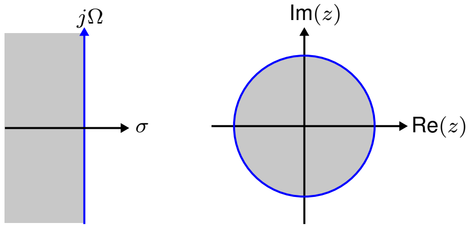
$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

kan omskrives til

$$z = \frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

Lad $s = \sigma + j\Omega$ så gælder det at

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T}+\sigma\right)^2+\Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T}-\sigma\right)^2+\Omega^2}}$$



Imaginæraksen for s-planen ($\sigma = 0$) mappes til enhedscirklen $|z| = 1$.
Venstre halvplan af s-planen ($\sigma < 0$) mappes til det indre af enhedscirklen $|z| < 1$.
Højre halvplan af s-planen ($\sigma > 0$) mappes til z-planen foruden enhedscirklen og dens indre $|z|$>1.

Fra

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega}$$

Fra

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega}$$

ses det at argumentet af z for $\sigma = 0$ er

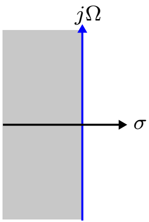
$$\angle z = \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2} + \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2} = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2}$$

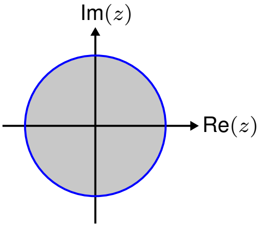
Fra

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega}$$

ses det at argumentet af z for $\sigma = 0$ er

$$\angle z = \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} + \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$



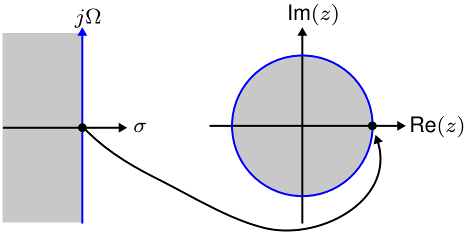


Fra

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega}$$

ses det at argumentet af z for $\sigma = 0$ er

$$\angle z = \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} + \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$



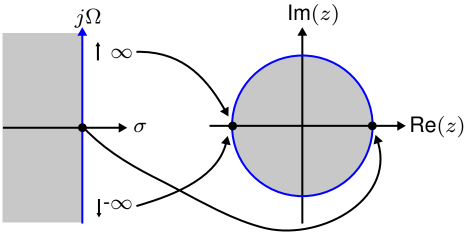
Origo for s-planen mappes til $z = 1\angle 0°$.

Fra

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega}$$

ses det at argumentet af z for $\sigma = 0$ er

$$\angle z = \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} + \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$



Origo for s-planen mappes til $z = 1\angle 0°$.
For Ω gående imod $\pm\infty$ går argumentet for z imod $\pm 180°$.

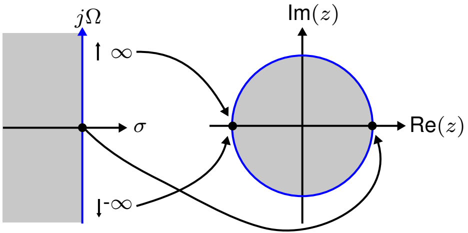
Fra

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega}$$

ses det at argumentet af z for $\sigma = 0$ er

$$\angle z = \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} + \tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$

Frekvensområdet $0 < f < \infty$ for det analoge filter transformeres til frekvensområdet $0 < f < f_o$ for det digitale filter.

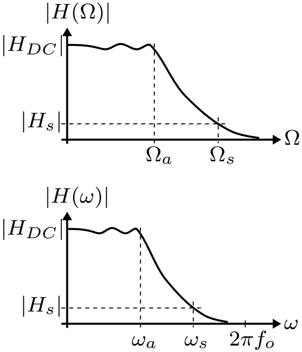


Origo for s-planen mappes til $z = 1\angle 0°$.
For Ω gående imod $\pm\infty$ går argumentet for z imod $\pm 180°$.

Bilineær z-transformation

Frekvens warping (I)

Da frekvensområdet $0 < f < \infty$ for det analoge filter transformeres til frekvensområdet $0 < f < f_o$ for det digitale filter, bliver frekvensaksen deformeret. Dette påvirker afskæringsfrekvensen ω_a og stopbåndsfrekvensen ω_s for det digitale filter.



Relationen mellem Ω og ω findes ved at indsætte $z = e^{j\omega T}$ i

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Relationen mellem Ω og ω findes ved at indsætte $z = e^{j\omega T}$ i

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Dette giver

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} \\ &= \frac{2}{T}\frac{j\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = \frac{2}{T} j\tan(\omega T/2) \end{aligned}$$

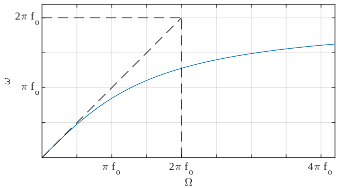
Bilineær z-transformation
Frekvens warping (II)

Relationen mellem Ω og ω findes ved at indsætte $z = e^{j\omega T}$ i

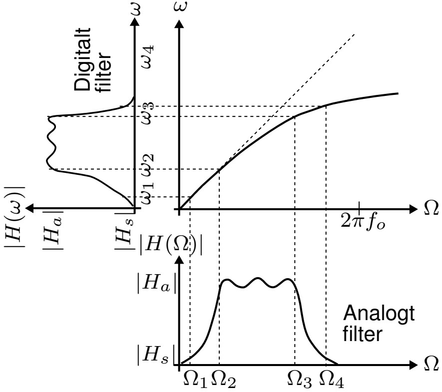
$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Dette giver

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} \\ &= \frac{2}{T}\frac{j\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = \frac{2}{T} j\tan(\omega T/2) \end{aligned}$$



Konsekvensen af frekvens warping kan ses af følgende båndpasfilter.



Et analogt 5. ordens Butterworth lavpasfilter $H(s)$ har -3 dB afskæringsfrekvens $f_3 = 3$ kHz og -30 dB stopbåndsfrekvens $f_{30} = 6$ kHz.
Filtret digitaliseres ved bilineær z-transformation med samplefrekvens 16 kHz.

Bilineær z-transformation

Eksempel (I)

Et analogt 5. ordens Butterworth lavpasfilter $H(s)$ har -3 dB afskæringsfrekvens $f_3 = 3$ kHz og -30 dB stopbåndsfrekvens $f_{30} = 6$ kHz.
Filtret digitaliseres ved bilineær z-transformation med samplefrekvens 16 kHz.

Ved brug af ligningen

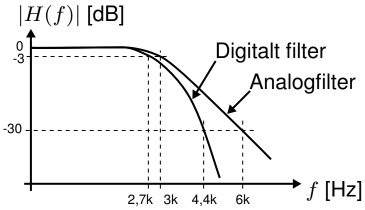
$$\omega = \frac{2}{T} \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \qquad [\text{rad/s}]$$

findes -3 dB afskæringsfrekvensen og -30 dB stopbåndsfrekvens for det digitale filter

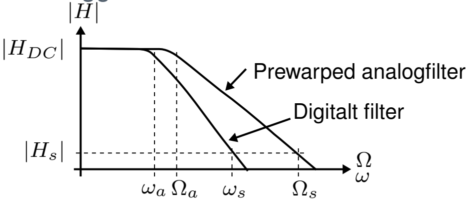
$$\omega_3 = 17,03\text{k rad/s} \qquad \text{og} \qquad \omega_{30} = 27,74\text{k rad/s}$$

hvilket svarer til 2,7 kHz og 4,4 kHz.

Konsekvensen af frekvens warping for lavpasfiltret ses af følgende amplitude-karakteristik.



Ideen ved prewarping er at for-forvrænge det analoge filters afskæringsfrekvens Ω_a og stopbåndsfrekvens Ω_s således at det digitale filters afskæringsfrekvens ω_a og stopbåndsfrekvens ω_s kommer til at ligge ved ønskede frekvenser.



De prewarpede frekvenser findes ud fra

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan(\omega T/2) \qquad \text{[rad/s]}$$

For at designe et digitalt filter med -3 dB afskæringsfrekvens på 3 kHz og -30 dB stopbåndsfrekvens ≤ 6 kHz, så skal de tilsvarende (Prewarpede) frekvenser findes for et analogt filter ved brug af

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad [\text{rad/s}]$$

For at designe et digitalt filter med -3 dB afskæringsfrekvens på 3 kHz og -30 dB stopbåndsfrekvens ≤ 6 kHz, så skal de tilsvarende (Prewarpede) frekvenser findes for et analogt filter ved brug af

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad [\text{rad/s}]$$

Når samplefrekvensen er 16 kHz bliver disse frekvenser

$$\Omega_3 = 21,38\text{k rad/s} \qquad \text{og} \qquad \Omega_{30} = 77,25\text{k rad/s}$$

hvilket svarer til 3,4 kHz og 12,3 kHz.

Bilineær z-transformation

Eksempel (I)

For at designe et digitalt filter med -3 dB afskæringsfrekvens på 3 kHz og -30 dB stopbåndsfrekvens ≤ 6 kHz, så skal de tilsvarende (Prewarpede) frekvenser findes for et analogt filter ved brug af

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad \text{[rad/s]}$$

Når samplefrekvensen er 16 kHz bliver disse frekvenser

$$\Omega_3 = 21,38\text{k rad/s} \qquad \text{og} \qquad \Omega_{30} = 77,25\text{k rad/s}$$

hvilket svarer til 3,4 kHz og 12,3 kHz.

Nu kan et frekvensnormeret lavpasfilter designes med stopbåndsfrekvens

$$\frac{f_{30}}{f_3} = \frac{12,3k}{3,4k} = 3,6$$

Bilineær z-transformation
Eksempel (II)

For det specifikke filter er det nødvendige ordenstal 3.
Proceduren for at finde det digitale filter ud fra det frekvensnormerede prototype filter er

1. Denormer prototypefiltret til den prewarpede afskæringsfrekvens Ω_a
2. Find det digitale filter ved bilineær z-transformation

For det specifikke filter er det nødvendige ordenstal 3.
Proceduren for at finde det digitale filter ud fra det frekvensnormerede prototype filter er

1. Denormer prototypefiltret til den prewarpede afskæringsfrekvens Ω_a
2. Find det digitale filter ved bilineær z-transformation

Det er dog muligt at finde det digitale filter direkte ud fra prototypefiltret ved brug af

$$H(z) = H(s)\big|_{s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

hvor C er prewarpingkonstanten, der benyttes i stedet for $\frac{2}{T}$, for at skalere frekvensen.

Prewarpingkonstanten bestemmes ud fra relationen

$$\Omega_a = C \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) \qquad [\text{rad/s}]$$

hvor Ω_a er afskæringsfrekvensen for det frekvensnormerede analoge filter (som altid er 1 rad/s) og ω_a er den ønskede afskæringsfrekvens for det digitale filter.

Prewarpingkonstanten bestemmes ud fra relationen

$$\Omega_a = C \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) \qquad [\text{rad/s}]$$

hvor Ω_a er afskæringsfrekvensen for det frekvensnormerede analoge filter (som altid er 1 rad/s) og ω_a er den ønskede afskæringsfrekvens for det digitale filter.
Derfor bliver prewarpingkonstanten

$$C = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)} = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)$$

Et første ordens system har formen

$$H(s) = \frac{A_1 s + A_0}{B_1 s + B_0}$$

og ved bilineær z-transformation fås

$$H(z) = H(s)\big|_{s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{A_1 C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + A_0}{B_1 C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + B_0} = \frac{A_1 C(1-z^{-1}) + A_0(1+z^{-1})}{B_1 C(1-z^{-1}) + B_0(1+z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{A_0+A_1C}{B_0+B_1C} + \frac{A_0-A_1C}{B_0+B_1C}z^{-1}}{1 + \frac{B_0-B_1C}{B_0+B_1C}z^{-1}}$$

Bilineær z-transformation

Koefficienter af 1. ordens systemer

Et første ordens system har formen

$$H(s) = \frac{A_1 s + A_0}{B_1 s + B_0}$$

og ved bilineær z-transformation fås

$$H(z) = H(s)\big|_{s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{A_1 C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + A_0}{B_1 C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + B_0} = \frac{A_1 C(1-z^{-1}) + A_0(1+z^{-1})}{B_1 C(1-z^{-1}) + B_0(1+z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{A_0+A_1C}{B_0+B_1C} + \frac{A_0-A_1C}{B_0+B_1C}z^{-1}}{1 + \frac{B_0-B_1C}{B_0+B_1C}z^{-1}}$$

Dermed bliver det digitale filter

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

hvor

$$a_0 = \frac{A_0 + A_1 C}{B_0 + B_1 C}, \qquad a_1 = \frac{A_0 - A_1 C}{B_0 + B_1 C}, \qquad b_1 = \frac{B_0 - B_1 C}{B_0 + B_1 C}$$

Betragt det frekvensnormerede 1. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

hvilket svarer til

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = 0 \qquad B_0 = 1 \qquad B_1 = 1$$

Et digitalt filter med afskæringsfrekvens 300 Hz ønskes designet med en samplingfrekvens på 16 kHz.

Betragt det frekvensnormerede 1. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

hvilket svarer til

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = 0 \qquad B_0 = 1 \qquad B_1 = 1$$

Et digitalt filter med afskæringsfrekvens 300 Hz ønskes designet med en samplingfrekvens på 16 kHz.
For at finde det digitale filters koefficienter udregnes prewarpingkonstanten

$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = 16,957$$

Betragt det frekvensnormerede 1. ordens lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

hvilket svarer til

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = 0 \qquad B_0 = 1 \qquad B_1 = 1$$

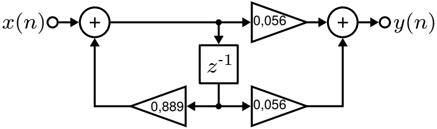
Et digitalt filter med afskæringsfrekvens 300 Hz ønskes designet med en samplingfrekvens på 16 kHz.
For at finde det digitale filters koefficienter udregnes prewarpingkonstanten

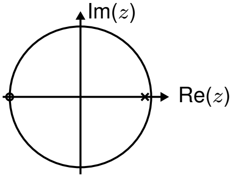
$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = 16,957$$

Ved brug af formlerne for a_0, a_1, b_1 findes

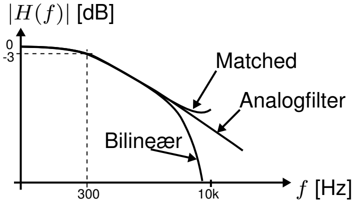
$$H(z) = \frac{0,056 + 0,056z^{-1}}{1 - 0,889z^{-1}}$$

Filtret har et nulpunkt i $z = -1$ og en pol i $z = 0,889$ og har følgende realisationsstruktur.





Det ses af amplitudekarakteristikken for filtret at aliaseringsfejlen er elimineret ved bilineær z-transformation.



Et 2. ordens system har formen

$$H(s) = \frac{A_2 s^2 + A_1 s + A_0}{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}$$

og ved bilineær z-transformation fås

$$H(z) = H(s)\big|_{s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{A_2\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + A_1\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + A_0}{B_2\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + B_1\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + B_0}$$

$$= \frac{\frac{A_0+A_1C+A_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2} + \frac{2(A_0-A_2C^2)}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-1} + \frac{A_0-A_1C+A_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-2}}{1 + \frac{2(B_0-B_2C^2)}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-1} + \frac{B_0-B_1C+B_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-2}}$$

Et 2. ordens system har formen

$$H(s) = \frac{A_2 s^2 + A_1 s + A_0}{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}$$

og ved bilineær z-transformation fås

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{A_2\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + A_1\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + A_0}{B_2\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + B_1\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + B_0}$$

$$= \frac{\frac{A_0+A_1C+A_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2} + \frac{2(A_0-A_2C^2)}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-1} + \frac{A_0-A_1C+A_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-2}}{1 + \frac{2(B_0-B_2C^2)}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-1} + \frac{B_0-B_1C+B_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-2}}$$

Dermed bliver det digitale filter

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{A_2\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + A_1\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + A_0}{B_2\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + B_1\left(C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + B_0}$$

$$= \frac{\frac{A_0+A_1C+A_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2} + \frac{2(A_0-A_2C^2)}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-1} + \frac{A_0-A_1C+A_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-2}}{1 + \frac{2(B_0-B_2C^2)}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-1} + \frac{B_0-B_1C+B_2C^2}{B_0+B_1C+B_2C^2}z^{-2}}$$

Dermed bliver det digitale filter

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

hvor

$$a_0 = \frac{A_0 + A_1C + A_2C^2}{B_0 + B_1C + B_2C^2}, \qquad a_1 = \frac{2(A_0 - A_2C^2)}{B_0 + B_1C + B_2C^2}, \qquad a_2 = \frac{A_0 - A_1C + A_2C^2}{B_0 + B_1C + B_2C^2}$$

Betragt følgende frekvensnormerede 2. ordens Butterworth lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

Bilineær z-transformation

Eksempel (I)

Betragt følgende frekvensnormerede 2. ordens Butterworth lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

Design et digitalt 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens 800 Hz og samplefrekvens 8 kHz.

Bilineær z-transformation

Eksempel (I)

Betragt følgende frekvensnormerede 2. ordens Butterworth lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

Design et digitalt 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens 800 Hz og samplefrekvens 8 kHz.
Det digitale filter designes ved at finde prewarpingkonstanten

$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = 3,078$$

hvorefter filterkoefficienterne kan beregnes til

$$a_0 = 0,07 \qquad a_1 = 0,13 \qquad a_2 = 0,07 \qquad b_1 = -1,14 \qquad b_2 = 0,41$$

Betragt følgende frekvensnormerede 2. ordens Butterworth lavpasfilter

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$$

Design et digitalt 2. ordens Butterworth lavpasfilter med afskæringsfrekvens 800 Hz og samplefrekvens 8 kHz.
Det digitale filter designes ved at finde prewarpingkonstanten

$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = 3,078$$

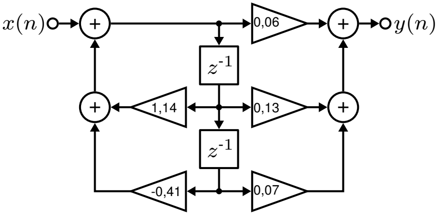
hvorefter filterkoefficienterne kan beregnes til

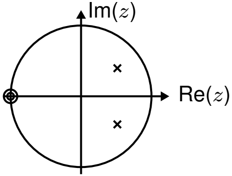
$$a_0 = 0,07 \qquad a_1 = 0,13 \qquad a_2 = 0,07 \qquad b_1 = -1,14 \qquad b_2 = 0,41$$

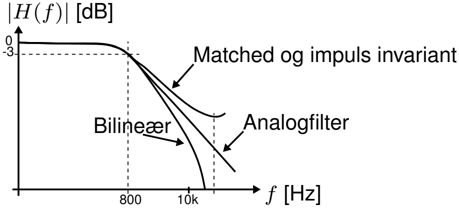
Slutteligt bliver filtrets overføringsfunktion

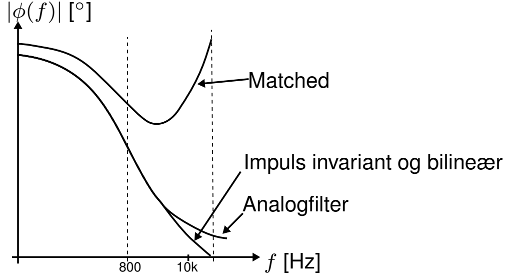
$$H(z) = \frac{0,07 + 0,13z^{-1} + 0,07z^{-2}}{1 - 1,14z^{-1} + 0,41z^{-2}}$$

Det digitale filter har to nulpunkter i $z = -1$ og poler i $z = 0,57 \pm j0,29$. Realisationsstrukturen for filtret er vist herunder.

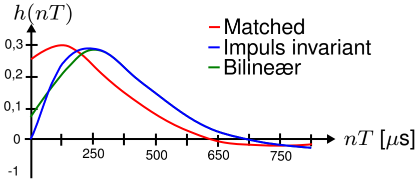





$|H(f)|$ [dB]
0
-3
Matched og impuls invariant
Analogfilter
Bilineær
800
10k
f [Hz]


$|\phi(f)|$ [°]
Matched
Impuls invariant og bilineær
Analogfilter
800
10k
f [Hz]

Bilineær z-transformation
Eksempel (IV)



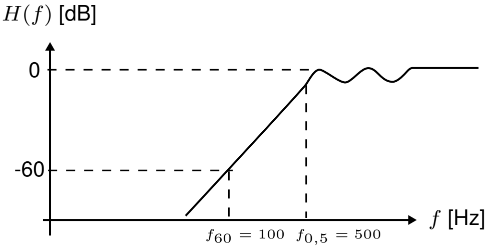
Følgende er proceduren for design af digitale filtre ved brug af bilineær z-transformation

1. Prewarping konstanten bestemmes som

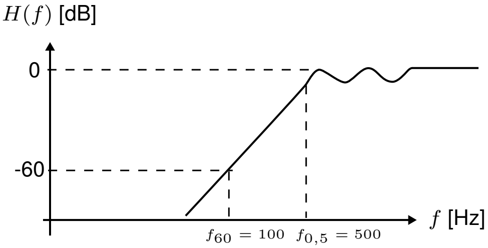
$$C = \cot \frac{\omega_i T}{2}$$

   hvor $i = a$ ved lavpasfilterdesign og $i = c$ ved design af båndpas- og båndstopfiltre.
2. Ordenstallet for filtret bestemmes på baggrund af den prewarpede stopbåndsfrekvens.
3. Den frekvensnormerede og faktoriserede analoge overføringsfunktion $H(s)$ opstilles.
4. Den digitale overføringsfunktions koefficienter beregnes.
5. Filtret implementeres som en kaskadekoblet realisationsstruktur.

Design et 0,5 dB Chebyshev højpasfilter med specifikationer som vist i figuren.



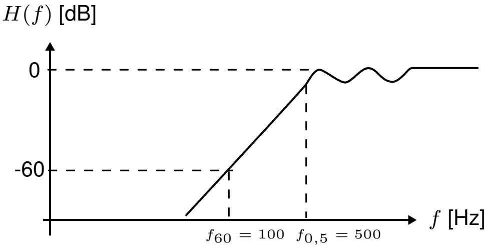
Design et 0,5 dB Chebyshev højpasfilter med specifikationer som vist i figuren.



Bestem prewarping konstanten ud fra afskæringsfrekvensen $f_{0,5}$

$$C = \cot \frac{2\pi f_{0,5} T}{2} = 5,027$$

Design et 0,5 dB Chebyshev højpasfilter med specifikationer som vist i figuren.



Bestem prewarping konstanten ud fra afskæringsfrekvensen $f_{0,5}$

$$C = \cot \frac{2\pi f_{0,5} T}{2} = 5,027$$

Bestem ordenstallet på baggrund af den prewarpede stopbåndsfrekvens

$$\Omega_{60} = C \tan \frac{2\pi f_{60} T}{2} = 0,1975$$

Ordenstallet findes fra et 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter med normeret stopbåndsfrekvens

$$\frac{\Omega_{0,5}}{\Omega_{60}} = \frac{1}{0,1975} = 5,063$$

Ordenstallet aflæses til $N = 4$.

Ordenstallet findes fra et 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter med normeret stopbåndsfrekvens

$$\frac{\Omega_{0,5}}{\Omega_{60}} = \frac{1}{0,1975} = 5,063$$

Ordenstallet aflæses til $N = 4$.
Fra tabelopslag har 0,5 dB Chebyshev lavpasfiltret overføringsfunktion

$$H_{\mathsf{lp}}(s) = \frac{0,35641}{s^2 + 0,84668s + 0,35641} \frac{1,06352}{s^2 + 0,35071s + 1,06352}$$

Ordenstallet findes fra et 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter med normeret stopbåndsfrekvens

$$\frac{\Omega_{0,5}}{\Omega_{60}} = \frac{1}{0,1975} = 5,063$$

Ordenstallet aflæses til $N = 4$.
Fra tabelopslag har 0,5 dB Chebyshev lavpasfiltret overføringsfunktion

$$H_{\mathsf{lp}}(s) = \frac{0,35641}{s^2 + 0,84668s + 0,35641} \frac{1,06352}{s^2 + 0,35071s + 1,06352}$$

Et høspasfilter opnås ved at erstatte s med $1/s$

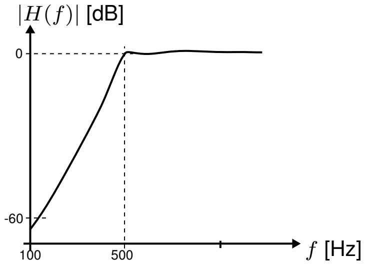
$$H_{\mathsf{hp}}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2,376s + 2,806} \frac{s^2}{s^2 + 0,3298s + 0,9403}$$

Den digitale overføringsfunktion fås ved bilineær z-transformation til

$$H(z) = \frac{0,6315 - 1,2629z^{-1} + 0,6315z^{-2}}{1 - 1,1227z^{-1} + 0,4031z^{-2}} \cdot \frac{0,9068 - 1,814z^{-1} + 0,9068z^{-2}}{1 - 1,7461z^{-1} + 0,8810z^{-2}}$$

Den digitale overføringsfunktion fås ved bilineær z-transformation til

$$H(z) = \frac{0,6315 - 1,2629z^{-1} + 0,6315z^{-2}}{1 - 1,1227z^{-1} + 0,4031z^{-2}} \cdot \frac{0,9068 - 1,814z^{-1} + 0,9068z^{-2}}{1 - 1,7461z^{-1} + 0,8810z^{-2}}$$



Et IIR-filter designes ved at følge proceduren

1. Filtrets specifikationer opstilles
2. Filtrets z-domæne overføringsfunktion opstilles ved brug af
    - Matched z-transformation
    - Impuls invariant z-transformation
    - Bilineær z-transformation
3. Der vælges optimal realisationsstruktur
4. Der fremstilles program til signalprocessor eller tegnes diagram for hardwareløsning

En diskret overføringsfunktion fås ved bilineær z-transformation som

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Da frekvensområdet $0 < f < \infty$ for det analoge filter transformeres til frekvensområdet $0 < f < f_o$ for det digitale filter, bliver frekvensaksen deformeret. Dette kaldes *frekvens warping*, og er årsagen til at udføre *prewarping*.

Følgende er proceduren for design af digitale filtre ved brug af bilineær z-transformation

1. Prewarping konstanten bestemmes som

$$C = \cot \frac{\omega_i T}{2}$$

   hvor $i = a$ ved lavpasfilterdesign og $i = c$ ved design af båndpas- og båndstopfiltre.
2. Ordenstallet for filtret bestemmes på baggrund af den prewarpede stopbåndsfrekvens.
3. Den frekvensnormerede og faktoriserede analoge overføringsfunktion $H(s)$ opstilles.
4. Den digitale overføringsfunktions koefficienter beregnes.
5. Filtret implementeres som en kaskadekoblet realisationsstruktur.