28/10/2022 Mat aflevering 2

feb. 2019 opg 3 Baldar W. Holst

a) løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \ln(x^y) \quad \text{Separabel } \overbrace{\text{diff.}}^{\text{1. ordens}} \text{ ligning}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \ln(x)\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \ln(x)\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(y) = x \cdot \ln(x) - x + k$$ integrationskonstant for begge sider

$$\Updownarrow$$

$$y = e^{x \cdot \ln(x) - x + k}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = e^{\ln(x)^x} \cdot e^{-x} \cdot e^k$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{y = x^x \cdot e^{-x} \cdot C}} \quad C \in \mathbb{R}$$ ny konstant

100%

b) Beregn den partikulære løsning på diff. ligningen

$$y(x) = e^{(x^2 \cdot \ln(x) + x + C)}$$ med punktet $y(1) = e$.

$$e = e^{(1^2 \cdot \ln(1) + 1 + C)}$$ ln(f) på begge sider

$$\Updownarrow$$

$$1 = 1 \cdot 0 + 1 + C$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

Altså er dette den partikulære løsning

$$\underline{\underline{y(x) = e^{(x^2 \cdot \ln(x) + x)}}}$$

100%

28/10/2022 Mat Aflevering 2

Jan. 2020 opg 3 Balder W. Holst

a) Find alle løsninger til diff. ligningen.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$q(x) = \frac{1}{x^2}$

$p(x) = \frac{1}{x}$

Løsningsformel for lineære førsteordens differentialligninger.

$y' + p(x) \cdot y = q(x)$

Inhomogen da $q(x) \neq 0$.

Løsningen er på formen:

$f(x) = e^{-P(x)} \cdot \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx$

hver $P(x) = \int p(x)$

Integrerer $p(x)$

$\int p(x) = \int \frac{1}{x} = \ln(x)$ konstanten forsvinder senere alligevel.

Sætter ind i løsningen

$$y(x) = e^{-\ln(x)} \cdot \int e^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = x^{-1} \cdot \int x \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = x^{-1} \int \frac{1}{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = x^{-1} \cdot (\ln(x) + c)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = \frac{\ln(x) + C}{x} \quad \text{hver } C \in \mathbb{R}$$

100%

b) find den specifikke løsning hvis $y(x) = A \cdot x \cdot e^{(x-\frac{1}{2})} + 2$ er den generelle løsning. Løsningen går gennem punktet $y(\frac{1}{2}) = 4$.

100%

Sætter ind i den generelle løsning.

$4 = A \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} + 2 \Leftrightarrow 4 = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{e^0}_{1} + 2 \Leftrightarrow 4 = A \cdot \frac{1}{2} + 2$

$\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} A \Rightarrow A = 4$

Dette er så den specifikke løsning: $y(x) = 4 \cdot x \cdot e^{(x-\frac{1}{2})} + 2$