Lektion 5: Introduktion til z-transformation

Signalbehandling

Christoffer Sloth

`chsl@mmmi.sdu.dk`

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

Agenda

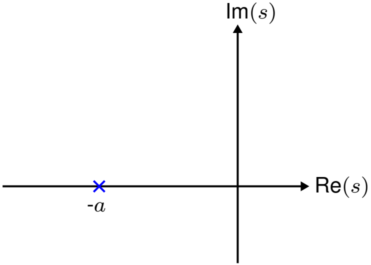
Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

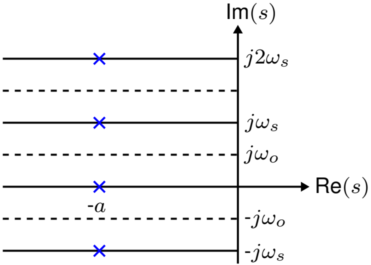
[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

Den Laplace transformerede af $x(t) = e^{-at}$ har en pol i $s = -a$.



Den Laplace transformerede af sekvensen $x(nT) = e^{-anT}$ har poler $s = -a \pm jn\omega_s$.



Konklusion: Ved sampling gentages pol-nulpunktsdiagrammet langs imaginær-aksen periodisk med samplefrekvensen.

Definition (z-transformation)
Den z-transformerede af en kausal sekvens $x(n)$ er defineret som

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1}$$

Definition (z-transformation)
Den z-transformerede af en kausal sekvens $x(n)$ er defineret som

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1}$$

Bemærk at (1) konvergerer hvis $|z| < 1$.

Definition (z-transformation)
Den z-transformerede af en kausal sekvens $x(n)$ er defineret som

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{1}$$

Bemærk at (1) konvergerer hvis $|z| < 1$.

Notation
Følgende notation benyttes til (invers) z-transformation

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$$
$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

Relation mellem s-domæne og z-domæne

Generel relation

Fra tidligere haves den Laplace transformerede af sekvensen $x(n)$

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-snT}$$

Relation mellem s-domæne og z-domæne

Generel relation

Fra tidligere haves den Laplace transformerede af sekvensen $x(n)$

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-snT}$$

Sammenholdes denne med definitionen af z-transformationen

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

ses det at

$$X_s(s) = X(z) \qquad \text{når } z = e^{sT}$$

Relation mellem s-domæne og z-domæne

Generel relation

Fra tidligere haves den Laplace transformerede af sekvensen $x(n)$

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-snT}$$

Sammenholdes denne med definitionen af z-transformationen

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

ses det at

$$X_s(s) = X(z) \qquad \text{når } z = e^{sT}$$

På tilsvarende vis fås

$$s = \frac{1}{T} \ln(z)$$

Den generelle relation imellem s og z er

$$z = e^{sT}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$.

Relation mellem s-domæne og z-domæne

Imaginær aksen af s-planen

Den generelle relation imellem s og z er

$$z = e^{sT}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$.

Som eksempel sættes $\sigma = 0$, så fås

$$z = e^{j\omega T}$$

eller ($\omega = 2\pi f$)

$$z = 1\angle 2\pi \frac{f}{f_s}$$

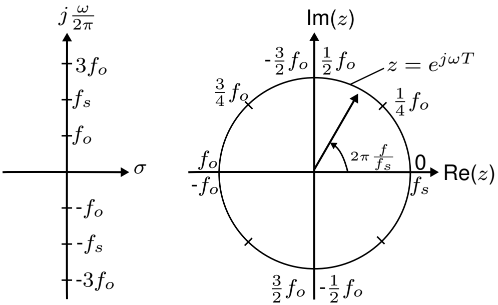
Relation mellem s-domæne og z-domæne

Imaginær aksen af s-planen

Den generelle relation imellem s og z er

$$z = e^{sT}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$.



Som eksempel sættes $\sigma = 0$, så fås

$$z = e^{j\omega T}$$

eller ($\omega = 2\pi f$)

$$z = 1\angle 2\pi\frac{f}{f_s}$$

Relation mellem s-domæne og z-domæne
Venstre halv-plan af s-planen

Den generelle relation imellem s og z er

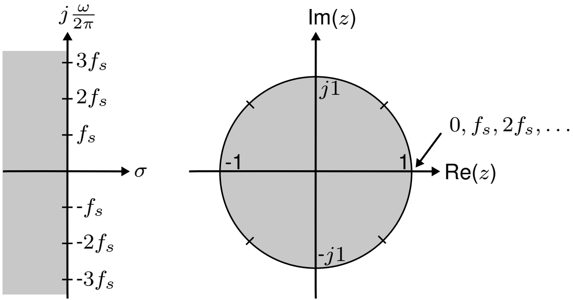
$$z = e^{sT} = e^{\sigma/f_s} \angle 2\pi \frac{f}{f_s}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$.

Den generelle relation imellem s og z er

$$z = e^{sT} = e^{\sigma/f_s} \angle 2\pi \frac{f}{f_s}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$.For $\sigma < 0$ fås $|z| < 1$. Dermed bliver venstre halvplan det indre af enhedscirklen.



Relation mellem s-domæne og z-domæne

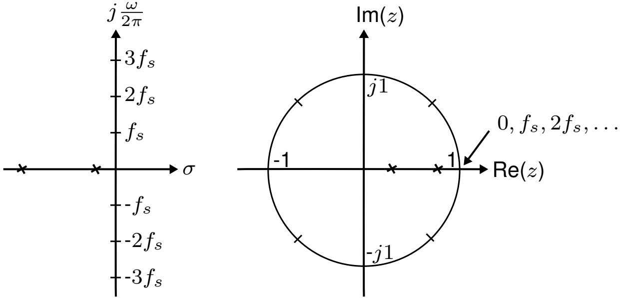
Real-akse af s-planen

Den generelle relation imellem s og z er

$$z = e^{sT}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$. På polær form er real-aksen ($\omega = 0$)

$$z = e^{\sigma/f_s}\angle 0^\circ$$



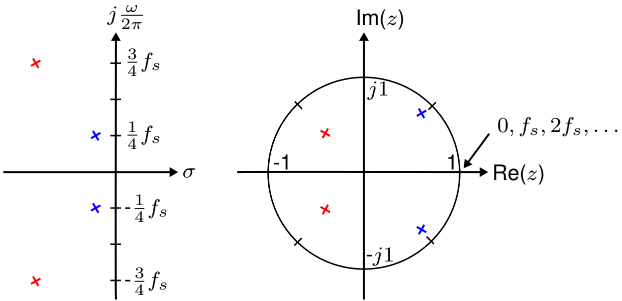
Relation mellem s-domæne og z-domæne

Linjer i s-planen med konstant imaginær værdi

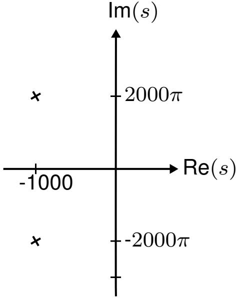
Den generelle relation imellem s og z er

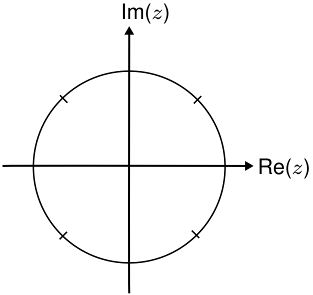
$$z = e^{sT}$$

hvor $s = \sigma + j\omega$.



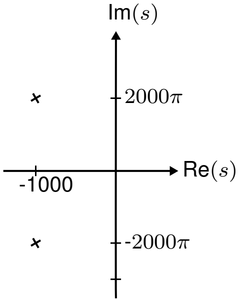
Hvor i z-planen ligger polerne, når $f_s = 4$ kHz og $f_s = 6$ kHz?

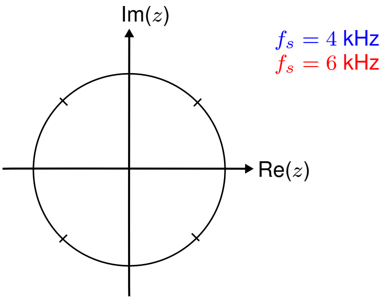




Relation mellem s-domæne og z-domæne
Eksempel

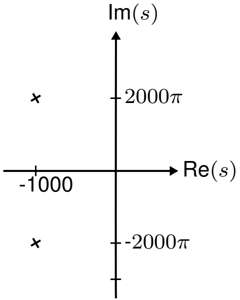
Hvor i z-planen ligger polerne, når $f_s = 4$ kHz og $f_s = 6$ kHz?

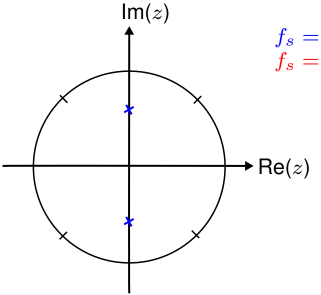




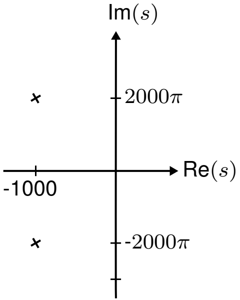
Relation mellem s-domæne og z-domæne
Eksempel

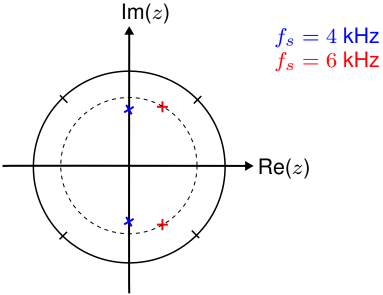
Hvor i z-planen ligger polerne, når $f_s = 4$ kHz og $f_s = 6$ kHz?





Hvor i z-planen ligger polerne, når $f_s = 4$ kHz og $f_s = 6$ kHz?





En række transformationsregler kan lette udregningen af z-transformationen - Specielt regelerne Z1 og Z2 benyttes ofte i dette kursus.

Regel	$x(n)$	$X(z)$
Z1	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Z2	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$
Z3	$x(n)a^{-n}$	$X(az)$
Z4	$x(n)s^{-bn}$	$X(e^{bT}z)$
Z5	$\sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$	$X(z)H(z)$

Den z-transformerede af $x(n-m)$ er

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n}$$

hvor $x(n)$ er en kausal sekvens.

Den z-transformerede af $x(n-m)$ er

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

hvor $x(n)$ er en kausal sekvens. Derfor kan ovenstående skrives

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=m}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

Den z-transformerede af $x(n-m)$ er

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

hvor $x(n)$ er en kausal sekvens. Derfor kan ovenstående skrives

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=m}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

Ved definition af $k := n-m$ fås

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-(k+m)} = z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

Den z-transformerede af $x(n-m)$ er

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

hvor $x(n)$ er en kausal sekvens. Derfor kan ovenstående skrives

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{n=m}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

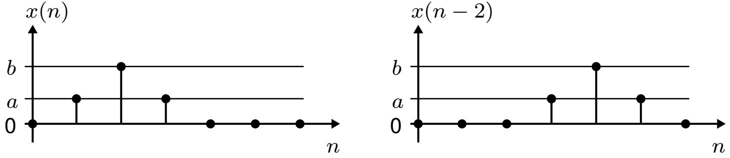
Ved definition af $k := n-m$ fås

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-(k+m)} = z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

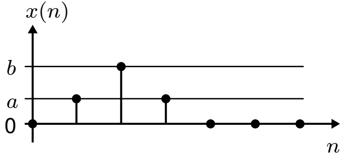
Slutteligt fås

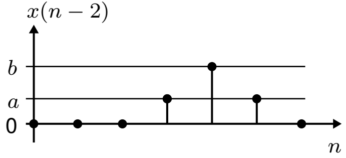
$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

Betragt sekvensen $x(n)$ og den forsinkede sekvens $x(n-2)$.



Betragt sekvensen $x(n)$ og den forsinkede sekvens $x(n-2)$.



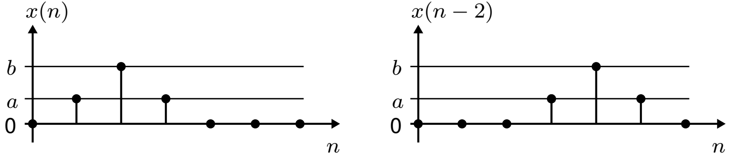


Vi kan bestemme den z-transformerede af $x(n)$ som

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

z-transformationsregler
Eksempel

Betragt sekvensen $x(n)$ og den forsinkede sekvens $x(n-2)$.



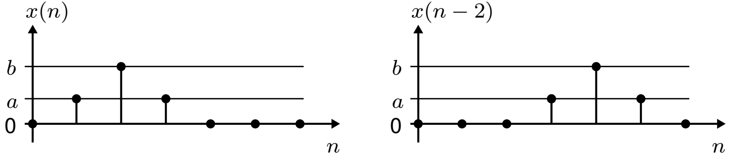
Vi kan bestemme den z-transformerede af $x(n)$ som

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Fra grafen ses det at

$$X(z) = az^{-1} + bz^{-2} + az^{-3}$$

Betragt sekvensen $x(n)$ og den forsinkede sekvens $x(n-2)$.



Vi kan bestemme den z-transformerede af $x(n)$ som

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Fra grafen ses det at

$$X(z) = az^{-1} + bz^{-2} + az^{-3}$$

Dermed bliver

$$\mathcal{Z}[x(n-2)] = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = az^{-3} + bz^{-4} + az^{-5}$$

z-transformationsregler

z-transformationspar

Par	$x(n)$	$X(z)$
ZT1	$\delta(n)$	1
ZT2	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$
ZT3	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
ZT4	a^n	$\frac{z}{z-a}$
ZT5	$e^{s_0 nT}$	$\frac{z}{z-e^{s_0 T}}$
ZT6	$\sin \omega_0 nT$	$\frac{(\sin \omega_0 T)z}{z^2-2(\cos \omega_0 T)z+1}$
ZT7	$\cos \omega_0 nT$	$\frac{z^2-(\cos \omega_0 T)z}{z^2-2(\cos \omega_0 T)z+1}$

z-transformationsregler
Eksempel

Betragt det z-transformerede af enhedsspringsekvensen $u(n)$

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n}$$

Betragt det z-transformerede af enhedsspringsekvensen $u(n)$

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n}$$

Da $u(n) = 1$ for $n \geq 0$ fåes

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Betragt det z-transformerede af enhedsspringsekvensen $u(n)$

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n}$$

Da $u(n) = 1$ for $n \geq 0$ fåes

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Fra tidligere vides det at for $|x| < 1$ haves den uendelige kvotientrække

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Betragt det z-transformerede af enhedsspringsekvensen $u(n)$

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n}$$

Da $u(n) = 1$ for $n \geq 0$ fåes

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Fra tidligere vides det at for $|x| < 1$ haves den uendelige kvotientrække

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Derfor bliver $U(z)$ givet ved

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

En Nte ordens differensligning, der beskriver et kausalt system kan skrives som

$$y(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+\cdots+b_Ny(n-N)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+\cdots+a_Nx(n-N)$$

hvor $x(n-i)$ er den tidsforsinkede indgangssekvens, $y(n-i)$ er den tidsforsinkede udgangssekvens og a_i, b_i er reelle koefficienter.

En Nte ordens differensligning, der beskriver et kausalt system kan skrives som

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + \cdots + b_N y(n-N) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \cdots + a_N x(n-N)$$

hvor $x(n-i)$ er den tidsforsinkede indgangssekvens, $y(n-i)$ er den tidsforsinkede udgangssekvens og a_i, b_i er reelle koefficienter.

Ovenstående differensligning kan skrives mere kompakt som

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

En Nte ordens differensligning, der beskriver et kausalt system kan skrives som

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + \cdots + b_N y(n-N) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \cdots + a_N x(n-N)$$

hvor $x(n-i)$ er den tidsforsinkede indgangssekvens, $y(n-i)$ er den tidsforsinkede udgangssekvens og a_i, b_i er reelle koefficienter.

Ovenstående differensligning kan skrives mere kompakt som

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

Er en b-koefficient forskellig fra nul, så kaldes differensligningen for *en rekursiv algoritme*.

Differensligninger af første og anden orden er vigtige, da filtre ofte implementeres som en kaskade af denne type filtre.

Differensligninger af første og anden orden er vigtige, da filtre ofte implementeres som en kaskade af denne type filtre.

En første ordens differensligning har $N = 1$ og er givet som

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)$$

Differensligninger af første og anden orden er vigtige, da filtre ofte implementeres som en kaskade af denne type filtre.

En første ordens differensligning har $N = 1$ og er givet som

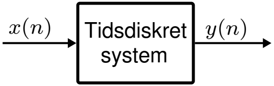
$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)$$

En anden ordens differensligning har $N = 2$ og er givet som

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2)$$

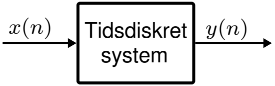
Betragt følgende differensligning

$$y(n) = x(n) + 0,5y(n-1)$$



Betragt følgende differensligning

$$y(n) = x(n) + 0,5y(n-1)$$



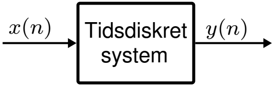
Hvad bliver udgangssekvensen $y(n)$, når indgangssekvensen $x(n)$ er en enhedsspringsekvens $u(n)$ og $y(n) = 0$ for $n < 0$?

Differensligninger

Eksempel: Første ordens differensligning

Betragt følgende differensligning

$$y(n) = x(n) + 0,5y(n-1)$$



Hvad bliver udgangssekvensen $y(n)$, når indgangssekvensen $x(n)$ er en enhedsspringsekvens $u(n)$ og $y(n) = 0$ for $n < 0$?

Vi lader $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
y(0) &= x(0) + 0,5y(-1) = 1 \\
y(1) &= x(1) + 0,5y(0) = 1,5 \\
y(2) &= x(2) + 0,5y(1) = 1,75 \\
y(3) &= x(3) + 0,5y(2) = 1,875
\end{aligned}$$

Tidsdiskrete systemer kan (ligesom tidskontinuerte systemer) beskrives med overføringsfunktioner, defineret som

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

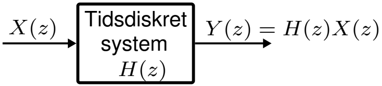
hvor $H(z)$ er overføringsfunktionen og $X(z)$, $Y(z)$ er indgangssekvensen og udgangssekvensen.

Overføringsfunktioner
Introduktion

Tidsdiskrete systemer kan (ligesom tidskontinuerte systemer) beskrives med overføringsfunktioner, defineret som

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

hvor $H(z)$ er overføringsfunktionen og $X(z)$, $Y(z)$ er indgangssekvensen og udgangssekvensen.



En overføringsfunktion findes ved z-transformation af en differensligning på formen

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$

En overføringsfunktion findes ved z-transformation af en differensligning på formen

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$

Ved z-transformationen benyttes reglen

$$z^{-m} X(z) = \mathcal{Z}(x(n-m))$$

En overføringsfunktion findes ved z-transformation af en differensligning på formen

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$

Ved z-transformationen benyttes reglen

$$z^{-m} X(z) = \mathcal{Z}(x(n-m))$$

Dermed fås

$$Y(z)\left(1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}\right) = X(z) \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}$$

En overføringsfunktion findes ved z-transformation af en differensligning på formen

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$$

Ved z-transformationen benyttes reglen

$$z^{-m} X(z) = \mathcal{Z}(x(n-m))$$

Dermed fås

$$Y(z)\left(1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}\right) = X(z) \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}$$

Overføringsfunktionen bliver dermed

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

Ved z-transformationen benyttes reglen

$$z^{-m}X(z) = \mathcal{Z}(x(n-m))$$

Dermed fås

$$Y(z)\left(1+\sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}\right) = X(z)\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}$$

Overføringsfunktionen bliver dermed

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}}$$

Overføringsfunktionen skrives også (ved multiplikation med z^N/z^N)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} b_i z^{N-i}} = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_N}{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \cdots + b_N}$$

Et første ordens system med differensligning

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) - b_1y(n-1)$$

har en overføringsfunktion givet som

$$Y(z)(1 + b_1z^{-1}) = X(z)(a_0 + a_1z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1}}{1 + b_1z^{-1}} = \frac{a_0z + a_1}{z + b_1}$$

Et første ordens system med differensligning

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)$$

har en overføringsfunktion givet som

$$Y(z)(1 + b_1 z^{-1}) = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} = \frac{a_0 z + a_1}{z + b_1}$$

En anden ordens system med differensligning

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2)$$

har en overføringsfunktion givet som

$$Y(z)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z^1 + a_2}{z^2 + b_1 z^1 + b_2}$$

Poler og nulpunkter

Definition af pol

Et tidsdiskret system har poler for værdierne af z hvor $H(z)$ er lig med ∞, dvs. polerne er rødder for nævnerpolynomiet af $H(z)$.
En overføringsfunktion

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

har poler for værdier af z hvor $Q(z) = 0$.

Et tidsdiskret system har nulpunkter for værdierne af z hvor $H(z)$ er lig med 0, dvs. nulpunkter er rødder for tællerpolynomiet af $H(z)$.
En overføringsfunktion

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

har nulpunkter for værdier af z hvor $P(z) = 0$.

Betragt følgende overføringsfunktion for et 1. ordens system

$$H(z) = \frac{0,58 - 0,58z^{-1}}{1 - 0,16z^{-1}}$$

Betragt følgende overføringsfunktion for et 1. ordens system

$$H(z) = \frac{0,58 - 0,58z^{-1}}{1 - 0,16z^{-1}}$$

Overføringsfunktionen kan omskrives til

$$H(z) = 0,58\frac{z - 1}{z - 0,16}$$

Betragt følgende overføringsfunktion for et 1. ordens system

$$H(z) = \frac{0,58 - 0,58z^{-1}}{1 - 0,16z^{-1}}$$

Overføringsfunktionen kan omskrives til

$$H(z) = 0,58\frac{z-1}{z-0,16}$$

Polen for $H(z)$ er værdien af z, når nævneren bliver nul, dvs.

$$z - 0,16 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 0,16$$

Betragt følgende overføringsfunktion for et 1. ordens system

$$H(z) = \frac{0,58 - 0,58z^{-1}}{1 - 0,16z^{-1}}$$

Overføringsfunktionen kan omskrives til

$$H(z) = 0,58\frac{z - 1}{z - 0,16}$$

Polen for $H(z)$ er værdien af z, når nævneren bliver nul, dvs.

$$z - 0,16 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 0,16$$

Nulpunktet for $H(z)$ er værdien af z, når tælleren bliver nul, dvs.

$$z - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1$$

Fra algebraens fundamentalsætning kan en overføringsfunktion skrives som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og p_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens poler.

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{0,5 + 0,707z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - 1,386z^{-1} + 0,64z^{-2}} = 0,5\frac{z^2 + 1,414z + 1}{z^2 - 1,386z + 0,64}$$

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{0,5 + 0,707z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - 1,386z^{-1} + 0,64z^{-2}} = 0,5\frac{z^2 + 1,414z + 1}{z^2 - 1,386z + 0,64}$$

Nulpunkterne findes ud fra tæller-polynomiets rødder

$$z^2 + 1,414z + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -0,707 \pm j0,707$$

Poler og nulpunkter
Eksempel (Pol-nulpunktsdiagram)

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{0,5 + 0,707z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - 1,386z^{-1} + 0,64z^{-2}} = 0,5\frac{z^2 + 1,414z + 1}{z^2 - 1,386z + 0,64}$$

Nulpunkterne findes ud fra tæller-polynomiets rødder

$$z^2 + 1,414z + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -0,707 \pm j0,707$$

Vi kalder de to nulpunkter z_1 og z_1^*, hvor $z_1 = 1\angle 135°$.

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{0,5 + 0,707z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - 1,386z^{-1} + 0,64z^{-2}} = 0,5\frac{z^2 + 1,414z + 1}{z^2 - 1,386z + 0,64}$$

Nulpunkterne findes ud fra tæller-polynomiets rødder

$$z^2 + 1,414z + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -0,707 \pm j0,707$$

Vi kalder de to nulpunkter z_1 og z_1^*, hvor $z_1 = 1\angle 135°$. Polerne findes ud fra nævner-polynomiets rødder

$$z^2 - 1,386z + 0,64 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 0,693 \pm j0,4$$

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{0,5 + 0,707z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 - 1,386z^{-1} + 0,64z^{-2}} = 0,5\frac{z^2 + 1,414z + 1}{z^2 - 1,386z + 0,64}$$

Nulpunkterne findes ud fra tæller-polynomiets rødder

$$z^2 + 1,414z + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -0,707 \pm j0,707$$

Vi kalder de to nulpunkter z_1 og z_1^*, hvor $z_1 = 1\angle 135°$. Polerne findes ud fra nævner-polynomiets rødder

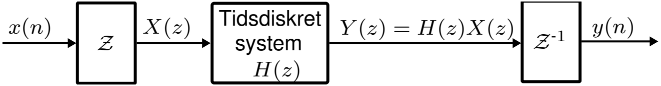
$$z^2 - 1,386z + 0,64 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 0,693 \pm j0,4$$

Vi kalder de to poler p_1 og p_1^*, hvor $p_1 = 0,8\angle 30°$.

Invers z-transformation

Invers z-transformation benyttes til at bestemme udgangsresponset $y(n)$ for et tidsdiskret system for en given indgangsstimulus $x(n)$. Denne analyse foregår efter følgende procedure

1. Systemets overføringsfunktion $H(z)$ opstilles med positive potenser af z.
2. Indgangssekvensen $x(n)$ z-transformeres. (Anvend tabelopslag)
3. Udgangsresponset i z-domæne beregnes $Y(z) = H(z)X(z)$.
4. Udgangssekvensen $y(n)$ udregnes ved invers z-transformation af $Y(z)$. (Anvend tabelopslag)



Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Vi benytter invers z-transformation at bestemme udgangsresponset $y(n)$ når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedssample $\delta(n)$.

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Vi benytter invers z-transformation at bestemme udgangsresponset $y(n)$ når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedssample $\delta(n)$.

1. Systemets overføringsfunktion $H(z)$ opstilles med positive potenser af z

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

2. Indgangssekvensen $x(n) = \delta(n)$ z-transformeres ved brug af tabelopslag

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$$

1. Systemets overføringsfunktion $H(z)$ opstilles med positive potenser af z

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

2. Indgangssekvensen $x(n) = \delta(n)$ z-transformeres ved brug af tabelopslag

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$$

3. Udgangsresponset $Y(z)$ beregnes til

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z - 0,5} \cdot 1$$

1. Systemets overføringsfunktion $H(z)$ opstilles med positive potenser af z

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

2. Indgangssekvensen $x(n) = \delta(n)$ z-transformeres ved brug af tabelopslag

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$$

3. Udgangsresponset $Y(z)$ beregnes til

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z - 0,5} \cdot 1$$

4. Udgangssekvensen $y(n)$ udregnes ved invers z-transformation af $Y(z)$. (Tabelopslag ZT4: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n$)

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z - 0,5}\right] = 0,5^n$$

Invers z-transformation

Eksempel 1

1. Systemets overføringsfunktion $H(z)$ opstilles med positive potenser af z

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

2. Indgangssekvensen $x(n) = \delta(n)$ z-transformeres ved brug af tabelopslag

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$$

3. Udgangsresponset $Y(z)$ beregnes til

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z - 0,5} \cdot 1$$

4. Udgangssekvensen $y(n)$ udregnes ved invers z-transformation af $Y(z)$. (Tabelopslag ZT4: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n$)

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z - 0,5}\right] = 0,5^n$$

Da $\ln(0,5) = -0,693$ kan $y(n)$ også skrives $y(n) = e^{-0,693n}$.

Proceduren for partialbrøkopløsning er

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form

$$Y(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = \frac{T(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

hvor $p_1, p_2, \ldots, p_N$ er rødder for nævner-polynomiet af $Y(z)$.

Proceduren for partialbrøkopløsning er

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form

$$Y(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = \frac{T(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

   hvor $p_1, p_2, \ldots, p_N$ er rødder for nævner-polynomiet af $Y(z)$.
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal. Dette udtryk opløses i brøker

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{T(z)}{zN(z)} = \frac{k_1}{z-p_1} + \frac{k_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z-p_N}$$

Proceduren for partialbrøkopløsning er

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form

$$Y(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = \frac{T(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

   hvor $p_1, p_2, \ldots, p_N$ er rødder for nævner-polynomiet af $Y(z)$.
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal. Dette udtryk opløses i brøker

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{T(z)}{zN(z)} = \frac{k_1}{z-p_1} + \frac{k_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z-p_N}$$

3. tællerkoefficienter k_i beregnes som

$$k_i = (z-p_i)\frac{Y(z)}{z}|_{z=p_i}$$

Proceduren for partialbrøkopløsning er

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal. Dette udtryk opløses i brøker

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{T(z)}{zN(z)} = \frac{k_1}{z-p_1} + \frac{k_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z-p_N}$$

3. tællerkoefficienter k_i beregnes som

$$k_i = (z-p_i)\frac{Y(z)}{z}|_{z=p_i}$$

4. Opskriv $\frac{Y(z)}{z}$ på partielbrøksopløst form og multiplicer med z.

Invers z-transformation ved partialbrøkopløsning

Procedure

Proceduren for partialbrøkopløsning er

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal. Dette udtryk opløses i brøker

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{T(z)}{zN(z)} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z - p_N}$$

3. tællerkoefficienter k_i beregnes som

$$k_i = (z - p_i)\frac{Y(z)}{z}|_{z=p_i}$$

4. Opskriv $\frac{Y(z)}{z}$ på partielbrøksopløst form og multiplicer med z.
5. Invers z-transformer alle brøkerne. (Tabelopslag)

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

Vi benytter invers z-transformation at bestemme udgangsresponset $y(n)$ når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedsspringsekvensen $u(n)$, dvs.

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z - 0,5}\frac{z}{z - 1} = \frac{z^2}{(z - 0,5)(z - 1)}$$

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

Vi benytter invers z-transformation at bestemme udgangsresponset $y(n)$ når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedsspringsekvensen $u(n)$, dvs.

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z - 0,5}\frac{z}{z - 1} = \frac{z^2}{(z - 0,5)(z - 1)}$$

Vi følger proceduren for partialbrøkopløsning

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form

$$Y(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = \frac{z^2}{(z - 0,5)(z - 1)}$$

hvor $z = 0,5$ og $z = 1$ er rødder for nævner-polynomiet af $Y(z)$.

Vi følger proceduren for partialbrøkopløsning

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form

$$Y(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = \frac{z^2}{(z-0,5)(z-1)}$$

   hvor $z = 0,5$ og $z = 1$ er rødder for nævner-polynomiet af $Y(z)$.

2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-1}$$

Vi følger proceduren for partialbrøkopløsning

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-1}$$

3. Tællerkoefficienterne beregnes som

$$k_1 = (z-p_1)\frac{Y(z)}{z}|_{z=p_1} = \frac{z}{z-1}|_{z=0,5} = -1$$
$$k_2 = (z-p_2)\frac{Y(z)}{z}|_{z=p_2} = \frac{z}{z-0,5}|_{z=1} = 2$$

Vi følger proceduren for partialbrøkopløsning

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-1}$$

3. Tællerkoefficienterne er $k_1 = -1$ og $k_2 = 2$.

Vi følger proceduren for partialbrøkopløsning

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-1}$$

3. Tællerkoefficienterne er $k_1 = -1$ og $k_2 = 2$.
4. Opskriv $\frac{Y(z)}{z}$ på partielbrøksopløst form og multiplicer med z

$$Y(z) = -\frac{1}{z-0,5}z + \frac{2}{z-1}z$$

Invers z-transformation ved partialbrøkopløsning
Eksempel

Vi følger proceduren for partialbrøkopløsning

1. Opstil udtryk for $Y(z)$ med positive potenser af z på faktoriseret form
2. Divider $Y(z)$ med z, så nævnerens ordenstal er større end tællerens ordenstal

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-1}$$

3. Tællerkoefficienterne er $k_1 = -1$ og $k_2 = 2$.
4. Opskriv $\frac{Y(z)}{z}$ på partielbrøksopløst form og multiplicer med z

$$Y(z) = -\frac{1}{z-0,5}z + \frac{2}{z-1}z$$

5. Invers z-transformer alle brøkerne. (Tabelopslag ZT4)

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = -\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-0,5}\right] + 2\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]$$
$$= -0,5^n + 2\cdot 1^n = 2 - 0,5^n = 2 - e^{-0,693n}$$

Opsummering

Definition (z-transformation)
Den z-transformerede af en kausal sekvens $x(n)$ er defineret som

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (2)$$

Bemærk at (2) konvergerer hvis $|z| < 1$.

Notation
Følgende notation benyttes til (invers) z-transformation

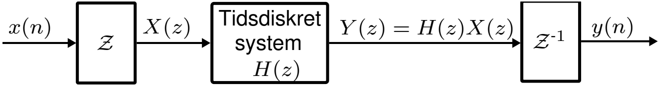
$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$$
$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

Opsummering

Anvendelse af invers z-transformation

Invers z-transformation benyttes til at bestemme udgangsresponset $y(n)$ for et tidsdiskret system for en given indgangsstimulus $x(n)$ via

1. Systemets overføringsfunktion $H(z)$ opstilles med positive potenser af z.
2. Indgangssekvensen $x(n)$ z-transformeres. (Anvend tabelopslag)
3. Udgangsresponset i z-domæne beregnes $Y(z) = H(z)X(z)$.
4. Udgangssekvensen $y(n)$ udregnes ved invers z-transformation af $Y(z)$. (Anvend tabelopslag)



Tidsdiskrete systemer kan (ligesom tidskontinuerte systemer) beskrives med overføringsfunktioner, defineret som

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

hvor $H(z)$ er overføringsfunktionen og $X(z)$, $Y(z)$ er indgangssekvensen og udgangssekvensen.
Overføringsfunktionen $H(z)$ har **poler** for værdier af z hvor $Q(z) = 0$ og **nulpunkter** for værdier af z hvor $P(z) = 0$.