Lektion 6: Systemanalyse i z-domæne

Signalbehandling

Christoffer Sloth

`chsl@mmmi.sdu.dk`

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

SDU

Agenda

Introduktion

Impulsrespons

Stabilitet

Frekvensresponsanalyse

Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

Opsummering

Introduktion
Pensum for Signalbehandling

Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

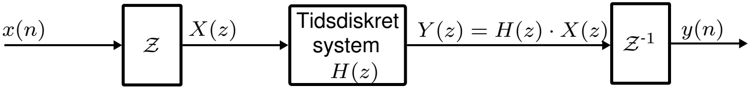
- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

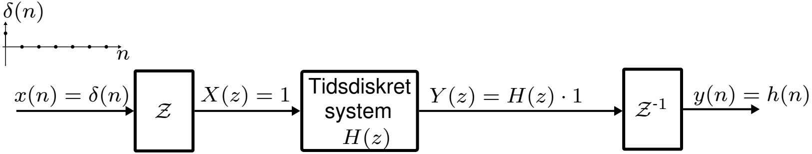
Impulsresponset for et tidsdiskret system kaldes $h(n)$, og er identisk med systemets udgangssekvens når inputsekvensen er en enhedssample $\delta(n)$ (Kronecker delta funktion).

Princippet er illustreret i følgende figur.



Impulsresponset for et tidsdiskret system kaldes $h(n)$, og er identisk med systemets udgangssekvens når inputsekvensen er en enhedssample $\delta(n)$ (Kronecker delta funktion).

Princippet er illustreret i følgende figur.



Impulsrespons
Beregning

Udgangsresponset i z-domæne er givet ved (da $\mathcal{Z}(\delta(n)) = 1$)

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= H(z) \end{aligned}$$

Impulsrespons
Beregning

Udgangsresponset i z-domæne er givet ved (da $\mathcal{Z}(\delta(n)) = 1$)

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= H(z) \end{aligned}$$

Impulsresponssekvensen kan udregnes ved invers z-transformation af $H(z)$, dvs.

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

Impulsrespons

Beregning

Udgangsresponset i z-domæne er givet ved (da $\mathcal{Z}(\delta(n)) = 1$)

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= H(z) \end{aligned}$$

Impulsresponssekvensen kan udregnes ved invers z-transformation af $H(z)$, dvs.

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

Konklusion: Et systems impulsresponssekvens $h(n)$ findes ved invers z-transformation af systemets overføringsfunktion $H(z)$.

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1 + 0,4z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

Bestem systems impulsresponssekvens $h(n)$.

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1 + 0,4z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

Bestem systems impulsresponssekvens $h(n)$.

Proceduren fra Lektion 5 anvendes, hvorfor $H(z)$ skrives med positive potenser

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

Impulsrespons
Eksempel (I)

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1 + 0,4z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

Bestem systems impulsresponssekvens $h(n)$.

Proceduren fra Lektion 5 anvendes, hvorfor $H(z)$ skrives med positive potenser

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

og det ses at de to **nulpunkter** er $z_1 = 0$ og $z_2 = -0,4$ og de to **poler** er $p_1 = 0,5$ og $p_2 = 0,2$.

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1 + 0,4z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

Bestem systems impulsresponssekvens $h(n)$.

Proceduren fra Lektion 5 anvendes, hvorfor $H(z)$ skrives med positive potenser

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

og det ses at de to **nulpunkter** er $z_1 = 0$ og $z_2 = -0,4$ og de to **poler** er $p_1 = 0,5$ og $p_2 = 0,2$.
Dermed kan overføringsfunktionen faktoriseres som

$$H(z) = \frac{z(z + 0,4)}{(z - 0,5)(z - 0,2)}$$

Ved partialbrøkopløsning fås

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2}$$

hvor

$$k_1 = (z - p_1)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_1} = \frac{z + 0,4}{z - 0,2}|_{z=0,5} = 3$$

$$k_2 = (z - p_2)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_2} = \frac{z + 0,4}{z - 0,5}|_{z=0,2} = -2$$

Ved partialbrøkopløsning fås

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2}$$

hvor

$$k_1 = (z - p_1)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_1} = \frac{z + 0,4}{z - 0,2}|_{z=0,5} = 3$$

$$k_2 = (z - p_2)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_2} = \frac{z + 0,4}{z - 0,5}|_{z=0,2} = -2$$

Dermed bliver overføringsfunktionen

$$H(z) = 3\frac{z}{z - 0,5} - 2\frac{z}{z - 0,2}$$

Impulsrespons
Eksempel (II)

Ved partialbrøkopløsning fås

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2}$$

hvor

$$k_1 = (z - p_1)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_1} = \frac{z + 0,4}{z - 0,2}|_{z=0,5} = 3$$

$$k_2 = (z - p_2)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_2} = \frac{z + 0,4}{z - 0,5}|_{z=0,2} = -2$$

Dermed bliver overføringsfunktionen

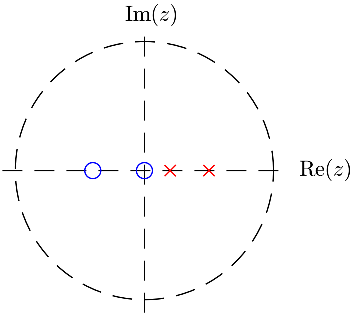
$$H(z) = 3\frac{z}{z - 0,5} - 2\frac{z}{z - 0,2}$$

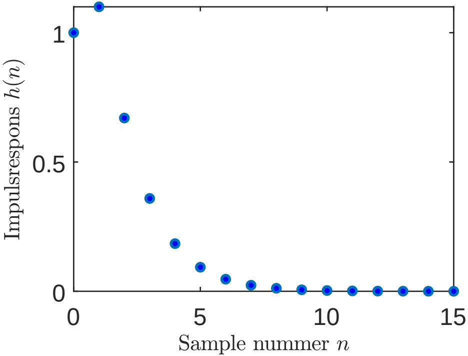
Ved tabelopslag fås

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = 3 \cdot 0,5^n - 2 \cdot 0,2^n = 3e^{-0,693n} - 2e^{-1,61n}$$

Impulsrespons

Eksempel (III)





Impulsrespons
System med simple poler (1)

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og p_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens poler.

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

Antag at alle poler er simple (alle poler har multiplicitet 1).

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)}$$

Ved brug af partialbrøkopsplitning kan overføringsfunktionen skrives

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z - p_N}$$

hvor $k_1, k_2, \ldots, k_N$ er koefficienter.

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)}$$

Ved brug af partialbrøkopsplitning kan overføringsfunktionen skrives

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z - p_N}$$

hvor $k_1, k_2, \ldots, k_N$ er koefficienter. Dermed haves

$$H(z) = k_1 \frac{z}{z - p_1} + k_2 \frac{z}{z - p_2} + \cdots + k_N \frac{z}{z - p_N}$$

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

Ved brug af partialbrøkopsplitning kan overføringsfunktionen skrives

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{k_N}{z - p_N}$$

hvor $k_1, k_2, \ldots, k_N$ er koefficienter. Dermed haves

$$H(z) = k_1 \frac{z}{z - p_1} + k_2 \frac{z}{z - p_2} + \cdots + k_N \frac{z}{z - p_N}$$

Dermed kan impulsresponssekvensen skrives som

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

hvor

$$h_i(n) = k_i \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z - p_i} \right]$$

For at bestemme impulsresponssekvensen

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

hvor

$$h_i(n) = k_i \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - p_i}\right\}$$

betragtes overføringsfunktionen $H_i(z) = z/(z - p_i)$ hvor polen er givet ved (vi antager at $k_i = 1$)

$$z = p_i = e^{s_i T} = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$$

Impulsrespons

System med simple poler (2)

For at bestemme impulsresponssekvensen

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

hvor

$$h_i(n) = k_i \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - p_i}\right\}$$

betragtes overføringsfunktionen $H_i(z) = z/(z - p_i)$ hvor polen er givet ved (vi antager at $k_i = 1$)

$$z = p_i = e^{s_i T} = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$$

Impulsresponset findes via invers z-transformation

$$h_i(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H_i(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z - p_i}\right\} = e^{s_i n T} = e^{\sigma_i n T} e^{j\omega_i n T}$$

Impulsrespons

System med simple poler (3)

Impulsresponssekvensen for et system med overføringsfunktion $H(z)$ der har poler $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{C}$ kan skrives

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

med

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT}$$

hvor polen er $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$.

Impulsresponssekvensen for et system med overføringsfunktion $H(z)$ der har poler $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{C}$ kan skrives

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

med

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT}$$

hvor polen er $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$.

Når $\sigma_i < 0$ så gælder det at

$$\lim_{n\to\infty} |h_i(n)| = 0$$

Impulsresponssekvensen for et system med overføringsfunktion $H(z)$ der har poler $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{C}$ kan skrives

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

med

$$h_i(n) = e^{\sigma_i n T} e^{j\omega_i n T}$$

hvor polen er $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$.

Når $\sigma_i < 0$ så gælder det at

$$\lim_{n\to\infty} |h_i(n)| = 0$$

På tilsvarende vis ses det at ændringen af fasen for $h_i(n)$ er $\omega_i T$ per sample.

Vi betragter følgende impulsrespons

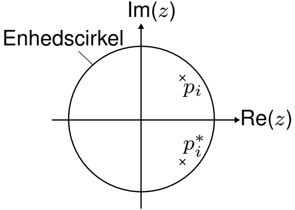
$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT} = e^{\sigma_i nT} \angle \omega_i nT$$

givet af polen $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ som på polær form er $p_i = e^{\sigma_i T} \angle \omega_i T$.

Vi betragter følgende impulsrespons

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT} = e^{\sigma_i nT} \angle \omega_i nT$$

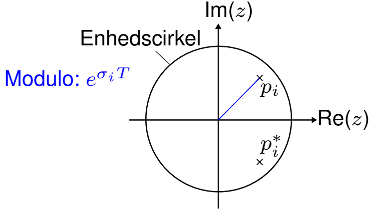
givet af polen $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ som på polær form er $p_i = e^{\sigma_i T} \angle \omega_i T$.



Vi betragter følgende impulsrespons

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT} = e^{\sigma_i nT} \angle \omega_i nT$$

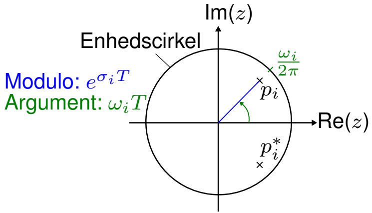
givet af polen $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ som på polær form er $p_i = e^{\sigma_i T} \angle \omega_i T$.



Vi betragter følgende impulsrespons

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT} = e^{\sigma_i nT} \angle \omega_i nT$$

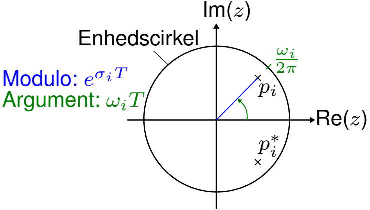
givet af polen $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ som på polær form er $p_i = e^{\sigma_i T} \angle \omega_i T$.



Vi betragter følgende impulsrespons

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT} = e^{\sigma_i nT} \angle \omega_i nT$$

givet af polen $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ som på polær form er $p_i = e^{\sigma_i T} \angle \omega_i T$.



Fra impulsresponssekvensen $h_i(n)$ ses det at

- **Modulo** af $h_i(n)$ ændres med en faktor $e^{\sigma_i T}$ mellem to på hinanden følgende samples.
- **Argumentet** af $h_i(n)$ ændres med $\omega_i T$ mellem to på hinanden følgende samples.

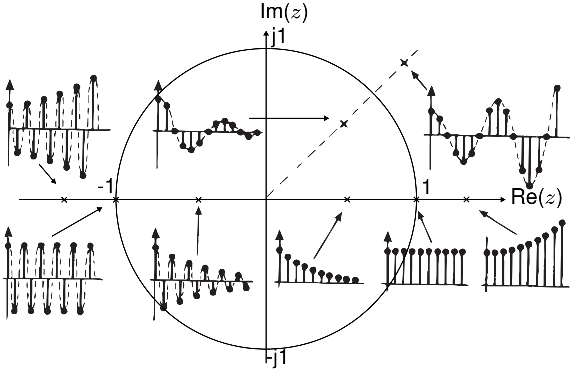
Impulsrespons

Relation til pol placering (Simple poler)

På baggrund af impulsresponset

$$h_i(n) = e^{\sigma_i nT} e^{j\omega_i nT} = e^{\sigma_i nT} \angle \omega_i nT$$

givet af polen $p_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ kan følgende diagram opstilles.



Impulsrespons

Impulsrespons for 2. ordens system (I)

Vi betragter et 2. ordens system givet ved følgende overføringsfunktion

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + 1,697z + 1,44}$$

Vi betragter et 2. ordens system givet ved følgende overføringsfunktion

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + 1,697z + 1,44}$$

Overføringsfunktionen $H(z)$ har et **nulpunkt** i $z = 0$ og to poler $p_1 = 1,2 \cdot e^{j3\pi/4}$ og $p_2 = 1,2 \cdot e^{-j3\pi/4}$.

Vi betragter et 2. ordens system givet ved følgende overføringsfunktion

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + 1,697z + 1,44}$$

Overføringsfunktionen $H(z)$ har et **nulpunkt** i $z = 0$ og to poler $p_1 = 1,2 \cdot e^{j3\pi/4}$ og $p_2 = 1,2 \cdot e^{-j3\pi/4}$.
Impulsresponset for systemet udregnes via partialbrøkopsplitning

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{k_1}{z - p_1} + \frac{k_2}{z - p_2}$$

hvor (og $k_2 = k_1^*$)

$$k_1 = (z - p_1)\frac{H(z)}{z}|_{z=p_1} = \frac{1}{p_1 - p_2} = \frac{1}{1,2(e^{j3\pi/4} - e^{-j3\pi/4})} = \frac{1}{1,2 \cdot 2 \cdot \sin(3\pi/4)j}$$

$$= \frac{1}{2,4 \cdot \sin(3\pi/4)} e^{-j\pi/2}$$

Impulsresponset kan nu udregnes via invers z-transformation af

$$H(z) = \frac{1}{2,4 \cdot \sin(3\pi/4)} \left(e^{-j\pi/2} \frac{z}{z - 1,2 \cdot e^{j3\pi/4}} + e^{j\pi/2} \frac{z}{z - 1,2 \cdot e^{-j3\pi/4}} \right)$$

Impulsresponset kan nu udregnes via invers z-transformation af

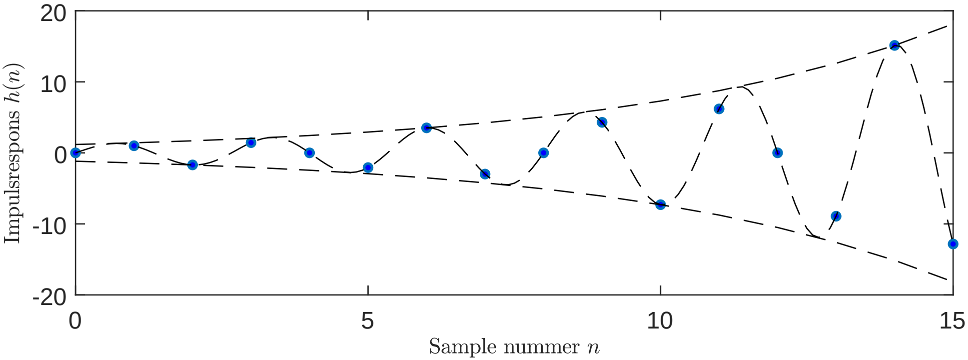
$$H(z) = \frac{1}{2,4 \cdot \sin(3\pi/4)} \left(e^{-j\pi/2} \frac{z}{z - 1,2 \cdot e^{j3\pi/4}} + e^{j\pi/2} \frac{z}{z - 1,2 \cdot e^{-j3\pi/4}} \right)$$

Ved brug af regel ZT4 fås

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2,4 \cdot \sin(3\pi/4)} \left(e^{-j\pi/2} 1,2^n \cdot e^{jn3\pi/4} + e^{j\pi/2} 1,2^n \cdot e^{-jn3\pi/4} \right) \\ &= \frac{1}{2,4 \cdot \sin(3\pi/4)} \cdot 1,2^n \left(e^{j(n3\pi/4 - \pi/2)} + e^{-j(n3\pi/4 - \pi/2)} \right) \\ &= \frac{1}{1,2 \cdot \sin(3\pi/4)} \cdot 1,2^n \cos(\frac{3\pi}{4} n - \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{1,2 \cdot \sin(3\pi/4)} \cdot e^{0,1823n} \sin(\frac{3\pi}{4} n) \end{aligned}$$

Impulsrespons

Impulsrespons for 2. ordens system (III)



Stabilitet

Et systems stabilitetstilstand kan være en af følgende

- **Stabilt system**: Et system er *stabilt* hvis dets impulsrespons $h(n)$ går mod nul når n går med uendelig

$$|h(n)| \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

- **Marginalt stabilt system**: Et system er *marginalt stabilt* hvis dets impulsrespons $h(n)$ går mod konstant værdi forskellig fra nul eller oscillerer med konstant amplitude og frekvens når n går mod uendelig.
- **Ustabilt system**: Et system er *ustabilt* hvis dets impulsrespons $h(n)$ vokser ubegrænset når n går med uendelig

$$|h(n)| \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

Hvordan kan vi ***let*** bestemme om et tidsdiskret system er stabilt?

Lad $H(z)$ være overføringsfunktionen for et tidsdiskret system med poler $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{C}$. Så gælder det at

- Systemet er **stabilt** hvis alle poler ligger indenfor enhedscirklen, dvs.

$$|p_i| < 1 \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, N$$

- Systemet er **marginalt stabilt** hvis mindst en pol (fx p_j) ligger på enhedscirklen, mens de øvrige poler ligger indenfor enhedscirklen, dvs.

$$|p_i| \leq 1 \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, N$$

og

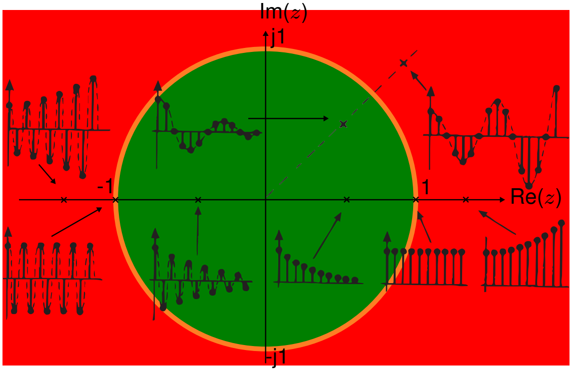
$$|p_j| = 1 \qquad \text{for } j \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

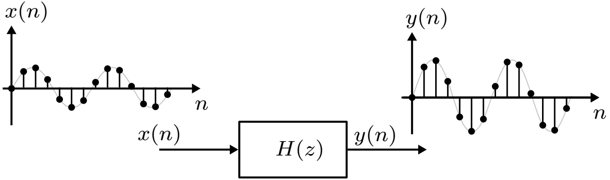
- Systemet er **ustabilt** hvis en pol (fx p_j) ligger udenfor enhedscirklen, dvs.

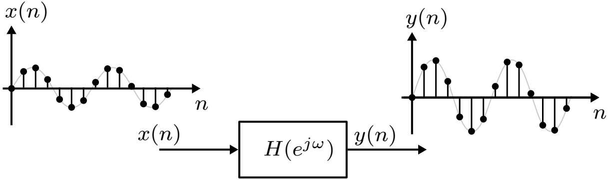
$$|p_j| > 1 \qquad \text{for } j \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

Stabilitet

Relation til z-plan




$x(n)$
n
$y(n)$
n
$x(n)$
$H(z)$
$y(n)$



En frekvensresponsanalyse giver et systems respons ved en sinusformet indgangssekvens. Her antages det at den sinusformede sekvens har været påtrykt fra tid $-\infty$ (analysen ser bort fra transient respons).

Når et tidsdiskret system påtrykkes en sinusformet indgangssekvens, hvad kan så siges om udgangssekvensen?

Et systems **frekvensrespons** er responset (udgangssignalet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Et systems **frekvensrespons** er responset (udgangssignalet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Udgangssignalet for et system med indgangssignal e^{st} kan bestemmes ved brug af overføringsfunktionen $H(s)$ som

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Et systems **frekvensrespons** er responset (udgangssignalet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Udgangssignalet for et system med indgangssignal e^{st} kan bestemmes ved brug af overføringsfunktionen $H(s)$ som

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Da

$$A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

kan responset skrives (grundet superposition)

$$y(t) = \frac{A}{2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

Da

$$A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

kan responset skrives (grundet superposition)

$$y(t) = \frac{A}{2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

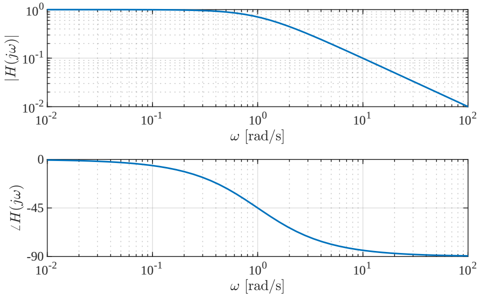
På polær form er $H(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, så

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2}M(\omega)\left(e^{j(\omega t+\varphi(\omega))} + e^{-(j\omega t+\varphi(\omega))}\right) \\ &= AM(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned}$$

hvor

$$M(\omega) = |H(j\omega)| \qquad \text{og} \qquad \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

Et **Bode plot** benyttes til at visualisere frekvensresponset, og tegnes normalt i logaritmisk skala.



For at studere et systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for z, der ligger på enhedscirklen, dvs.

$$z = e^{j\omega T}$$

For at studere et systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for z, der ligger på enhedscirklen, dvs.

$$z = e^{j\omega T}$$

Frekvensresponset for et tidsdiskret system $H(z)$ er dermed givet som

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$$

For at studere et systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for z, der ligger på enhedscirklen, dvs.

$$z = e^{j\omega T}$$

Frekvensresponset for et tidsdiskret system $H(z)$ er dermed givet som

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = H(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}$$

For at forkorte notationen skrives

$$H(j\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}$$

For at studere et systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for z, der ligger på enhedscirklen, dvs.

$$z = e^{j\omega T}$$

Frekvensresponset for et tidsdiskret system $H(z)$ er dermed givet som

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$$

For at forkorte notationen skrives

$$H(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$$

På polær form er frekvensresponset

$$H(j\omega) = |H(\omega)|\angle\varphi(\omega)$$

For at studere et systems respons til sinusformede signaler kan der kigges udelukkende på værdier for z, der ligger på enhedscirklen, dvs.

$$z = e^{j\omega T}$$

Frekvensresponset for et tidsdiskret system $H(z)$ er dermed givet som

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$$

For at forkorte notationen skrives

$$H(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$$

På polær form er frekvensresponset

$$H(j\omega) = |H(\omega)|\angle\varphi(\omega)$$

Amplituden er oftest givet i dB, dvs.

$$|H(\omega)| = 20\log\frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} \qquad \text{[dB]}$$

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

Frekvensresponsanalyse

Eksempel (I)

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

Vi ønsker at analysere frekvensresponset ved indgangssignal

$$x(n) = \sin(\omega n T)$$

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

Vi ønsker at analysere frekvensresponset ved indgangssignal

$$x(n) = \sin(\omega n T)$$

For at bestemme frekvensresponset udregnes $H(j\omega)$, dvs.

$$H(j\omega) = \frac{e^{j2\omega T} + 0,4e^{j\omega T}}{e^{j2\omega T} - 0,7e^{j\omega T} + 0,1}$$

Betragt overføringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 + 0,4z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

Vi ønsker at analysere frekvensresponset ved indgangssignal

$$x(n) = \sin(\omega n T)$$

For at bestemme frekvensresponset udregnes $H(j\omega)$, dvs.

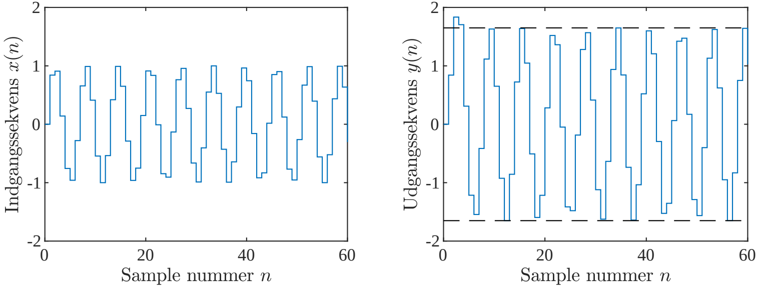
$$H(j\omega) = \frac{e^{j2\omega T} + 0,4e^{j\omega T}}{e^{j2\omega T} - 0,7e^{j\omega T} + 0,1}$$

For $\omega T = 1$

$$H(j\omega) = 0,92 - j1,37 = 1.65\angle - 56^{\circ}$$

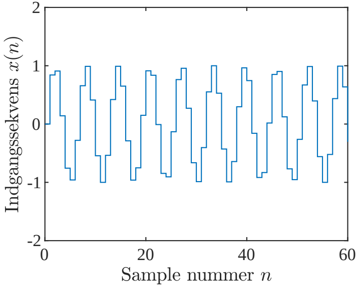
Følgende respons fås ved at påtrykke indgangssignalet

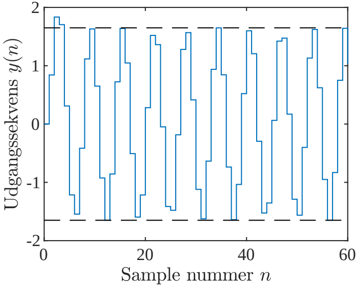
$$x(n) = \sin(\omega n T)$$



Følgende respons fås ved at påtrykke indgangssignalet

$$x(n) = \sin(\omega n T)$$





Bemærk det transiente forløb i starten af simuleringen, som frekvensresponsanalysen ikke betragter.

Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og p_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens poler.

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og p_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens poler.

For at bestemme frekvensresponset skal amplituden og fasen for $H(z)$ findes til flere z-værdier. **Amplituden** bliver

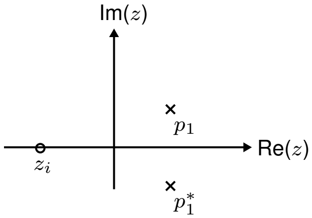
$$|H(z)| = a_0 \frac{|z - z_1||z - z_2|\cdots|z - z_N|}{|z - p_1||z - p_2|\cdots|z - p_N|}$$

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$|H(z)| = a_0 \frac{|z - z_1|}{|z - p_1||z - p_1^*|}$$



Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

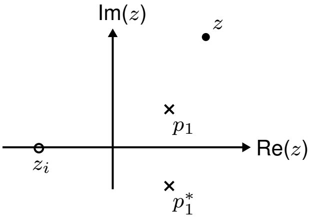
Eksempel (Amplitude)

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$|H(z)| = a_0 \frac{|z - z_1|}{|z - p_1||z - p_1^*|}$$



Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

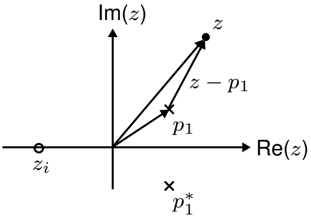
Eksempel (Amplitude)

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$|H(z)| = a_0 \frac{|z - z_1|}{|z - p_1||z - p_1^*|}$$



Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

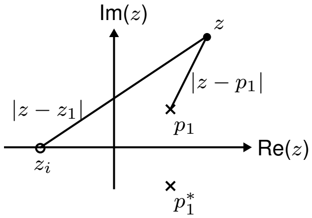
Eksempel (Amplitude)

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$|H(z)| = a_0 \frac{|z - z_1|}{|z - p_1||z - p_1^*|}$$



En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \dots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og p_i for $i = 1, \dots, N$ er overføringsfunktionens poler.

Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

Fase

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og p_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens poler.

For at bestemme frekvensresponset skal amplituden og fasen for $H(z)$ findes til flere z-værdier. **Fasen** bliver

$$\angle H(z) = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_N - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)$$

hvor $\psi_i = \angle(z - z_i)$ og $\theta_i = \angle(z - p_i)$.

Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

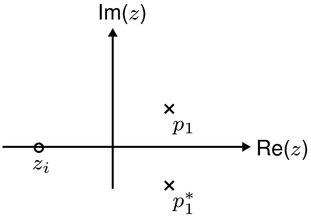
Eksempel (Fase)

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$\angle H(z) = \psi_1 - \theta_1 - \theta_2$$



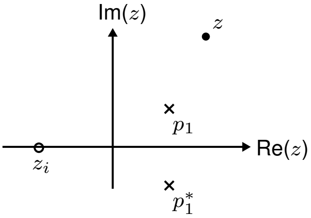
Grafisk bestemmelse af frekvensrespons
Eksempel (Fase)

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$\angle H(z) = \psi_1 - \theta_1 - \theta_2$$



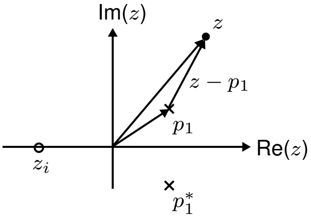
Grafisk bestemmelse af frekvensrespons
Eksempel (Fase)

Vi betragter overføringsfunktionen

$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

$$\angle H(z) = \psi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

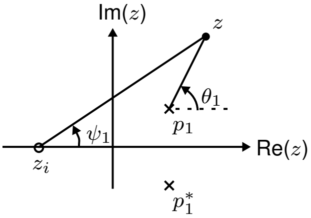


Vi betragter overføringsfunktionen

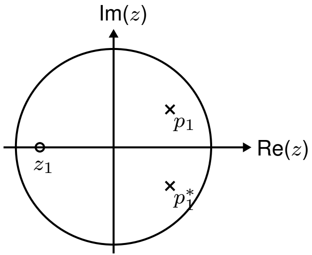
$$H(z) = a_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

der har amplitude

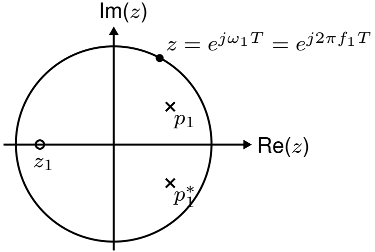
$$\angle H(z) = \psi_1 - \theta_1 - \theta_2$$



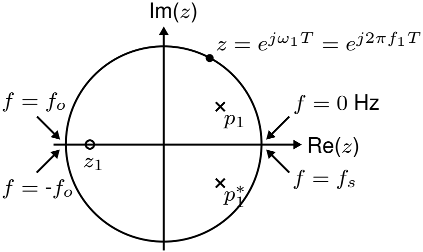
Frekvensresponset findes ved at finde amplitude og fase for $H(z)$ når $z \in \mathbb{C}$ ligger på enhedscirklen, dvs. $z = e^{j\omega t}$.



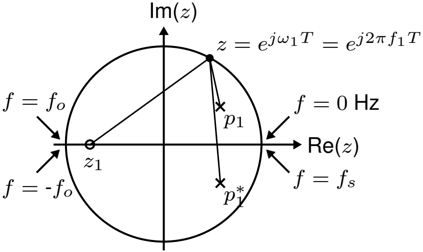
Frekvensresponset findes ved at finde amplitude og fase for $H(z)$ når $z \in \mathbb{C}$ ligger på enhedscirklen, dvs. $z = e^{j\omega t}$.



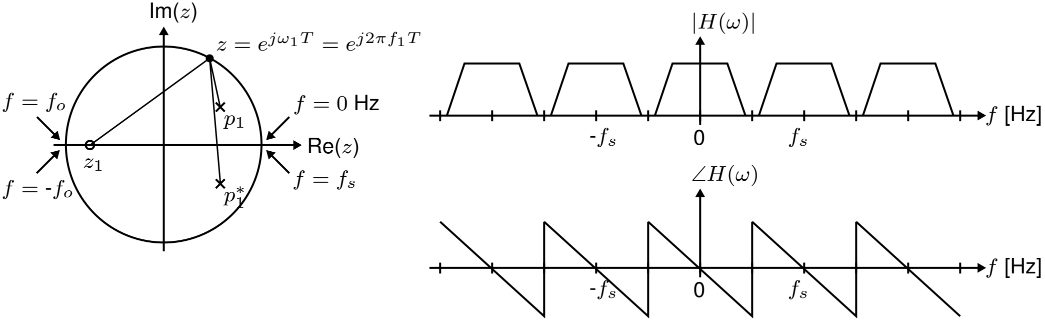
Frekvensresponset findes ved at finde amplitude og fase for $H(z)$ når $z \in \mathbb{C}$ ligger på enhedscirklen, dvs. $z = e^{j\omega t}$.



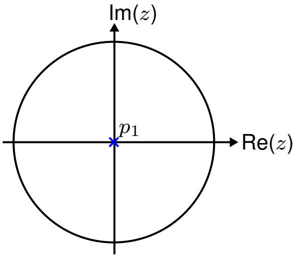
Frekvensresponset findes ved at finde amplitude og fase for $H(z)$ når $z \in \mathbb{C}$ ligger på enhedscirklen, dvs. $z = e^{j\omega t}$.



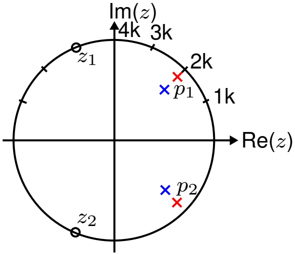
Frekvensresponset findes ved at finde amplitude og fase for $H(z)$ når $z \in \mathbb{C}$ ligger på enhedscirklen, dvs. $z = e^{j\omega t}$.



Hvordan ser frekvensresponset ud for en overføringsfunktion med følgende pol-nulpunktsdiagram?

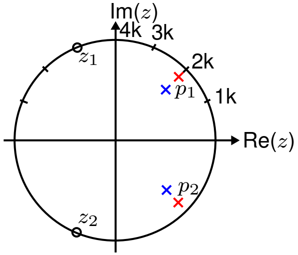


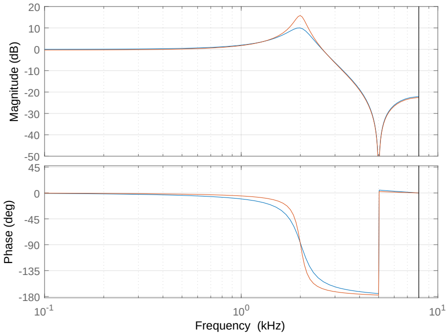
Grafisk bestemmelse af frekvensrespons
Eksempel 2



Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

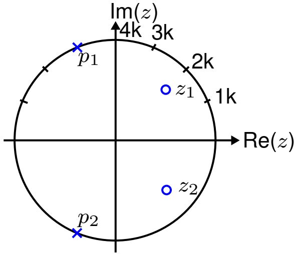
Eksempel 2





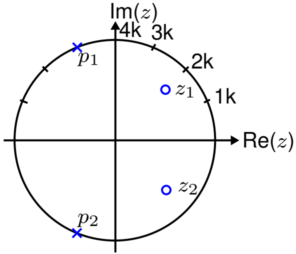
Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

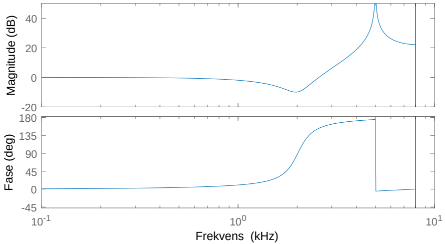
Eksempel 3



Grafisk bestemmelse af frekvensrespons

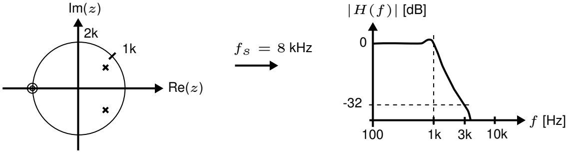
Eksempel 3

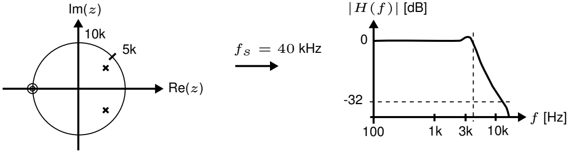




Grafisk bestemmelse af frekvensrespons
Samplefrekvens

Samplefrekvensens betydning for frekvensresponset er kun at flytte grafen langs frekvensaksen.





Opsummering

En overføringsfunktion kan faktoriseres som

$$H(z) = a_0 \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

hvor z_i for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens nulpunkter og $p_i = e^{s_i T} = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$ for $i = 1, \ldots, N$ er overføringsfunktionens poler.
Antag at alle poler er simple (alle poler har multiplicitet 1). Så kan impulsresponssekvensen skrives som

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_N(n)$$

hvor ($k_i \in \mathbb{C}$)

$$h_i(n) = k_i \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-p_i}\right\} = k_i e^{\sigma_i n T} e^{j\omega_i n T}$$

Et systems stabilitetstilstand kan være en af følgende

- **Stabilt system**: Et system er *stabilt* hvis dets impulsrespons $h(n)$ går mod nul når n går med uendelig
$$|h(n)| \to 0 \text{ for } n \to \infty$$
- **Marginalt stabilt system**: Et system er *marginalt stabilt* hvis dets impulsrespons $h(n)$ går mod konstant værdi forskellig fra nul eller oscillerer med konstant amplitude og frekvens når n går mod uendelig.
- **Ustabilt system**: Et system er *ustabilt* hvis dets impulsrespons $h(n)$ vokser ubegrænset når n går med uendelig
$$|h(n)| \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

Frekvensresponset findes ved at finde amplitude og fase for $H(z)$ når $z \in \mathbb{C}$ ligger på enhedscirklen, dvs. $z = e^{j\omega t}$.